清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：算法博弈论中的两个均衡问题

系　　别：物理系

专　　业：数理基础科学

姓　　名：朱泽园

指导教师：陆品燕　副研究员

2010 年 7 月 10 日

To my beloved mother.

To Ziji and Shaowei.

中文摘要

在博弈论中，以 John Forbes Nash 命名的纳什均衡已成为最广泛的解概念。纳什均衡是指这样的策略配置，其中任何一个玩家都不愿意单边修改自己的策略。最近兴起的算法博弈论这一领域，吸引了诸多的计算机科学家，他们从理论算法的角度分析譬如说可计算性或者近似性。

本篇论文研究了算法博弈论中的两个均衡问题：

第一个是在不完全信息下的最佳定价策略。我们通过贝叶斯纳什均衡定义了什么是参与者的理性，并且将其与单调函数的迭代联系在了一起。基于这个关系，我们通过分析的方法以及矩阵分析中的技巧，设计了一个精确计算均衡以及最优定价的多项式算法。

第二个是机制设计问题，我们需要建立可信机制，使得每个玩家都愿意汇报自己的真实信息，且这一策略处在纳什均衡。我们的工作与大部分工作的不同在于我们不允许金钱的传递。对于度量空间中的二设施选址问题，我们在确定性和随机性两个模型下，证明了近似比的上下界。我们的界在常数倍的比下是紧的，这大大改进了目前最优的结果。

关键词：纳什均衡；定价；可信机制；设施选址问题

ABSTRACT

Nash equilibrium, named after John Forbes Nash, has become the most widely used solution concept in game theory, and is a profile of strategies in which none of the players has the incentive to unilaterally change her own. Recent advance of algorithmic game theory encourages computer scientists to estimate for example the computability or the approximation from an algorithm-theoretical point of view.

This dissertation studies two famous cases in algorithmic game theory.

The first one is the optimal pricing strategy with incomplete information. We define the rationality of agents to be the strategy satisfying Bayesian Nash Equilibrium, and establish the connection to the iteration of a monotone function. Based on this connection we design a polynomial algorithm to help calculate the exact equilibrium and the optimal pricing, with analytical approaches and techniques in matrix analysis.

The second one is a mechanism design problem in which we need to set up a truthful mechanism to ensure that players sit in a Nash Equilibrium when they report their true internal value. Our work is different with the majority of studies since we disallow the transfer of money. In the two-facility game in a metric space, we manage to prove theoretical lower and upper bounds for the approximation ratio in both the deterministic and randomized cases. Our bounds are tight up to a constant and significantly improve the best known results.

Keywords： Nash Equilibrium; Pricing; Truthful Mechanism; Facility Game

目　录

第1章 引文

在游戏（如竞拍、定价）中，参与的个人通常是自私的，他们会尽可能在规则允许的范围内，最大化自己的收益。对于那些参与者不能通过独自行动而增加收益的策略，称之为均衡（或纳什均衡，非合作均衡）。

一个经典的例子来源于 1950 年的兰德公司，这是一个“囚徒问题(Prisoner’s Dilemma)”：警方逮捕嫌疑犯 A 和 B，将二者独立审讯，并提出了如下惩罚规则：

- 若二者都声称无罪，则同时被判入狱半年；
- 若二者都声称有罪，则同时被判入狱两年；
- 若其中一人认罪，则认罪者立即获释，否认有罪者获刑 10 年。

用表格概括如下：

表1.1 囚徒问题的表格概括

	A 声称无罪	**A 声称有罪**
B 声称无罪	同时获刑半年	A 立即释放；B 获刑 10 年
B 声称有罪	B 立即释放；A 获刑 10 年	同时获刑两年

注意到参与者通常是自私的，譬如“囚徒问题”中的嫌疑犯 A：倘若 B 声称有罪，A 应该也声称有罪来降低自己的服刑年数；倘若 B 声称无罪，A 也应该声称有罪即可当庭释放。因此对于 A 来说（类似地对于 B），他无论如何都应该选择坚持自己有罪，因而最后两个嫌疑犯会同时获刑两年。

对于这一个“同时声称有罪”的策略，我们称之为纳什均衡。在经济学中的理性(Rationality)假设中，我们往往认为非纳什均衡是不会出现的，例如囚徒问题中的全局最优，也就是两个嫌疑犯同时声称无罪，是不会出现的[①]。

本文从算法博弈论的角度，研究理性假设下的两个问题。

第一个问题是商品的定价。在单一商品的出售过程中，所有参与者都有一个心中的对商品的定价，此时的均衡是：对每一个独立的参与者，当真实定价小于心理定价时即买，否则不买。这个均衡是容易理解的。可是当社交网络被引入后，熟识的人会对自己用过的商品做出推荐，而这可以看作是提高了被推荐者的心理定价。

[①] 注，这里通常不考虑参与者的共谋(Collusion)，但最近有越来越多的文献开始对共谋问题深入研究，参见本文的文献调研部分。

我们将会看见，由于每个参与者心理定位的随机性和保密性，问题变成了“不完全信息的游戏(Games with Incomplete Information)”，此时需要研究贝叶斯纳什均衡。我们将设计一种多项式算法，通过分析的方法和矩阵特征值的方法，求解均衡，并且给出卖方一个最优的定价策略。

关于这一问题的更近一步研究，可以参阅作者的待投论文 [40]。

第二个问题是机制的设计。由于理性假设，全局最优的策略往往不能够达到。那么是否能够通过限制参与者的可选行为，或者改变游戏规则，来达到全局最优，或近似全局最优呢？

算法博弈论中的“机制设计(Mechanism Design)”问题，是旨在设计一个竞技规则，使得所期望的收益（譬如总收入、总社会福利等）尽可能大。然而在一个规则被指定后，参与者被假想为自私的，他们最终选取的策略是一个纳什均衡。机制设计中最重要的一项内容是，设计可信机制(Truthful Mechanism)，使得每个参与者都更愿意将自己真实的信息公布，并且这一行为是纳什均衡。

机制设计中最著名的例子是 Vickrey 拍卖（俗称第二定价拍卖）。在这个拍卖机制中，有一个商品被出售，竞价最高的竞拍者获得该商品，但是仅需要付出第二高的竞拍价那么多钱。可以证明，在这个机制中，竞拍者报出自己真实的心理定价是纳什均衡 [39]。在此基础之上，Vickrey、Clarke 和 Groves 三个人还提出了 VCG 拍卖 [39] [10] [19]，可以处理多个商品的同时竞拍。但是 VCG 机制需要通过金钱的流动保证达到均衡，即每个参与者都要付出一定的金钱，那么如果没有金钱参与，是否也能设计出可信的机制呢？我们将在第二个问题中研究“没有金钱参与的机制设计”。

关于这一部分的研究，可以参阅作者的已发表论文 [26]。

第2章 社交网络下的定价问题

2.1 问题背景

随着网络时代的来临，人与人之间的距离骤然缩短，大型的即时通讯软件（如MSN，QQ）和社交网站（如 MSN Space，校内网）的出现，更是让人与人之间的联系，更加频繁和快捷。根据 Google 最新的统计结果 [18]，世界上最大的社交网站 Facebook 更是已经名列所有网站访问频率之首。人们已经意识到，可以充分利用这些社交网络，去为大众谋取福利，或者为商家谋取商机。这一章我们考虑在社交网络下的商品买卖。

可以预见到，大部分人在购买商品前都愿意参考熟识的人的意见，同时，对于很多网络相关的产品，尤其是电子产品，当自己的朋友都已经使用这一款商品后，生活可以被大大的简化。譬如微软公司推出的音乐播放器 Zune，可以让两个用户方便地无线音乐同步，大大增加商品的价值。

我们这里考虑单一商品的出售(single-item)，假设其有无限量副本(multi-unit)，并且每个潜在买家仅需要一个副本(unit-demand)。这一定价问题，与很多实际的问题有着紧密联系，譬如微软公司销售 Windows 7，或者音乐播放器 Zune，都可以满足如上的假定。

同时，我们关心非歧视性定价，即在对所考察的用户群体，卖家将给出单一定价。这是出于三个角度考虑，第一，歧视性定价策略较为复杂且不容易实现；第二，歧视性定价有可能对消费者的购买造成负面影响 [32]，或是带来伦理上的问题；第三，即便是歧视定价，大多数情况也只能对较小的部分群体给与优惠推广政策，对于大部分的消费者还将采取单一定价。我们的最终目标是，使得卖家获得尽可能大的收益。

由于社交网络的引入，每个买家在购买了该商品之后，将对他所熟识的潜在购买者产生影响。类似前人的工作 [21] [1] [23] [29]，我们认为影响因子非负，即一个人对该商品的购买，不会减小别人购买的可能性。引入这一因素之后，将会有更多的买家由于周边人的使用，而愿意承受更高的定价，因此卖家可以获得更高的收益，甚至可以继续提高报价。

在先前的工作中， [21] [1]研究了社交网络下的定价。他们假定买家的心理定价，以及两两间的影响因子，都服从公开的概率分布，并且认为，优化定价策略需要同时完成两件事情：一是确定定价，二是确定报价的变化和顺序。具体来说：

- Hartline 等人 [21]的模型是，将买家排序并依次询问，对每个买家制定不同的价格（歧视性价格），而每个买家会根据先前的购买情况，决定自己是否购买。 [21]给出的定价策略是，对前一部分买家免费，对后一部分买家贪心，并且证明了与最优定价的差在常数级别内。但是，这一工作忽略了买家对未来的预测，因此低估了用户的购买能力。
- Akhlaghpour 等人 [1]的模型是，对所有的人提供同样的价格，但是随着时间的推移多次降价，假设买家在第一次出现可承受的价位时购买。这一工作的一大缺憾，也正如 [1]结尾分析的那样，没有考虑到买家对未来价格的考虑。值得注意的是，在同一个价格下， [1]提出了买家的迭代购买模式，即由于周围人的影响，不断出现新买家，直到终止再开始提供第二个价格。

2.1.1 主要贡献

在我们的文章中，我们分析一个单一定价的过程，不考虑价格在未来的变化。我们借鉴了 [1]中的迭代购买模式，但是假定所有用户只有一次机会选择是否购买，并且在购买期间无法得知其他买家的内心真实报价。这里与 [1]最大的不同在于，我们不需要用户得知其他买家的决定或者心理报价，在一定程度上保证了策略的保密性。

我们认为买家对商品的心理定价服从平均分布，这个分部是公开信息，但他们各自的真实心理定价是私有信息，这在经济学中这称作不完全信息的游戏①。同时我们假定影响因子是公开的定值。

在这一模型下，我们计算每个潜在买家的价格承受值，使得如果每个买家依照此承受值行动（当价格低于此则购买；当价格不低于此则不买），我们证明了这一策略是贝叶斯纳什均衡。

我们的主要贡献有：

- 我们定义了买家的理性行为：他们的策略遵循贝叶斯纳什均衡。这隐含假定了每个买家都是策略性(strategic)的，他们会分析其他买家的策略，做出自己

① Games of Incomplete Information，参见 [28]第 8 章。

"期望最优"的选择。这与前人的工作 [21]和 [1]有本质的区别，因为他们认为买家是短视的，只会根据当前已经确定购买的人群选择占优策略（dominant strategy）。

- 当假定所有买家为理性时，我们定义了卖家的最优定价。因为我们考虑了买家的策略性，我们计算出的最优收益，将严格高于 [21]与 [1]中定义的最优。
- 我们给出了均衡唯一存在的充分条件，这是一个对影响因子矩阵的限制。而对其他情形，我们也给出了均衡的性质，并且利用其中最小的那个均衡（称之为悲观均衡），去保证卖家的稳定收益。
- 我们设计了多项式时间的算法，精确求解悲观均衡和卖家的最优定价。注意这一算法并不是简单的。随着价格的变化，我们将会看到贝叶斯均衡会发生跳变，而我们用特征向量的方法巧妙地处理了这一跳变。

2.1.2 相关工作

关于不完全信息的游戏，早在 1967 年 Harsanyi [8]设计了一套关于参与者的"信念(belief)"等级的体系，其中包括每个参与者对其他参与者的收益的信念，每个参与者对"其他参与者关于收益的信念"的信念，等等……在他的先驱性工作中，参与者的私有信息被称作参与者的类型(type)。一个较新的 2003 年的工作，Battigalli 和 Siniscalchi [6]提出了一种通过迭代消去法分析不完全信息游戏的工具，并且证明了这种工具与贝叶斯纳什均衡的等价性，读者将会看到这一点与我们的结论是一致的。在更新的工作中，Chen 与 Micali [9]研究了保守的参与者在不完全信息游戏中的行为，并且建立了信念的两层等级体系。

关于物品的出售，除了通过定价的方式，还可以通过拍卖：构建可信的拍卖机制（truthful mechanism），使每个买家不愿意谎报自己的真实心理定价，因而达到纳什均衡（关于这方面的先驱性工作可参见 [39] [31]）。对于单个商品的无限量拍卖，不少工作是从竞争分析（competitive analysis）的角度着眼，将至少卖出两个商品的最优定价当作基准 [17]，研究可信的拍卖机制，并保证总收益在基准线的常数倍范围内 [20] [15] [16]。

而对于社交网络中最优化收益，很多文献的着眼点在于，选择一个恰当的初始集合（最有影响力的人群），将商品免费发放给他们，由此来扩大总收益。这一类问题的最优化通常是 NP-Hard 的 [13]，但也有一些著名的工作，给出了可证明的多项式近似算法。与我们的情形一样，他们也需要对问题作出限制条件（如 submodularity [23]，线性 [34]）。

2.2 问题描述

考虑这样一个不完全信息的定价问题：微软公司计划销售 Windows 7，有n个潜在买家，第i个买家对 Windows 7 心理估价$v_i \in [a_i, b_i]$，且已知v_i服从平均分布$U(a_i, b_i)$。这里a_i与b_i是公有信息，$b_i \geq a_i \geq 0$；v_i是私有信息，只有第i个买家自己可以看到。除此之外，这n个买家构成一个社交网络，其中第i个买家对第j个买家存在一个影响力因子$T_{ij} \geq 0$。

设卖方为 Windows 7 定价p，倘若n个买家的决定构成向量$(d_1, \dots d_n) \in \{0,1\}^n$，其中$d_i = 1$表示第$i$个买家决定购买，0 表示不买。此时第$i$个买家的收益定义为

$$u_i = d_i \cdot \left(v_i - p + \sum_{j \neq i} T_{ji} d_j\right)$$

如果i选择不买，收益为 0，否则收益为心理估价减去价格。注意到，如果对i有影响力的买家j也选择购买，收益将线性增加T_{ji}。

可是，由于心理定价v_i的不公开，我们只能求得第i个买家的购买概率$q_i = \Pr[d_i = 1]$。此时第i个买家购买的期望获利为$v_i - p + \sum_{j \neq i} T_{ji} q_j$。

定义 2-1：给定价格p，当概率向量$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots q_n) \in [0,1]^n$满足

$$q_i = \Pr_{v_i \sim U(a_i, b_i)}\left[v_i - p + \sum_{j \neq i} T_{ji} q_j > 0\right] \tag{2-1}$$

时，称$\boldsymbol{q}$为一个**关于$\boldsymbol{p}$的均衡**，或简称**均衡**。

这一个关于概率的均衡定义，事实上对应了纯策略贝叶斯纳什均衡(Pure Strategy Bayesian Nash Equilibrium)。我们回忆贝叶斯纳什均衡的定义（参见 [28] 第 8.E 章），用$d_i: [a_i, b_i] \to \{0,1\}$表示买家$i$的策略，设函数$\widetilde{u_i}(d_i(\cdot), d_{-i}(\cdot))$表示，当买家$i$选择策略$d_i(\cdot)$，且其他买家选择策略$d_{-i}(\cdot)$时，买家$i$的期望收益：

$$\widetilde{u_i}(d_i(\cdot), d_{-i}(\cdot)) = \mathbb{E}_v\left[d_i(v_i) \cdot (v_i - p + \sum_{j \neq i} T_{ji} d_j(v_j))\right]$$

定义 2-2：策略集$\boldsymbol{d}(\cdot) = (d_1(\cdot), \dots, d_n(\cdot))$被称作**贝叶斯纳什均衡**，当：

$$\forall i, d_i'(\cdot), \qquad \widetilde{u_i}(d_i(\cdot), d_{-i}(\cdot)) \geq \widetilde{u_i}(d_i'(\cdot), d_{-i}(\cdot))$$

下面的命题，将我们在定义 2-1 中定义的概率均衡，与贝叶斯纳什均衡联系在了一起。

命题 2-1：给定均衡$\boldsymbol{q}$，每个买家的“当自己的心理价位$v_i > p - \sum_{j \neq i} T_{ji} q_j$即购买，否则不购买”的策略是贝叶斯纳什均衡；反之，若假定买家遵循贝叶斯纳什均衡，则每个人的购买概率（当$v_i \sim U(a_i, b_i)$变化时）满足定义 2-1。

证明：设$\boldsymbol{d}(\cdot) = (d_1(\cdot), \dots, d_n(\cdot))$是满足贝叶斯纳什均衡的策略集，且$q_i = \Pr_{v_i}[d_i(v_i) = 1]$为买家$i$的购买概率，现在计算买家$i$的期望收益：

$$\begin{aligned}\widetilde{u_i}(d_i(\cdot),d_{-i}(\cdot)) &= \mathbb{E}_{v_i}\left[d_i(v_i)\cdot\left(v_i-p+\mathbb{E}_{v_{-i}}\left[\sum_{j\neq i}T_{ji}d_j(v_j)\right]\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{v_i}\left[d_i(v_i)\cdot\left(v_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j\right)\right]\end{aligned} \tag{2-2}$$

可见，倘若$\boldsymbol{d}(\cdot)$是贝叶斯纳什均衡，$d_i(v_i)$必须在所有$v_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j$为正的地方取 1[①]，故$q_i=\Pr[d_i(v_i)=1]=\Pr[\,v_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j>0]$，满足定义 2-1。

反过来，对于“当自己的心理价位$v_i>p-\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j$即购买，否则不购买”的策略，即$d_i(v_i)=\mathbb{I}\left[v_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j>0\right]$，其中$\mathbb{I}$是示性函数时，显然满足了将(2-2)最大化的目的，是贝叶斯纳什均衡。 ■

对于这一个社交网络下的定价问题，我们感兴趣如下问题：

1、均衡唯一么？

2、如果不唯一，是否存在着特殊的我们感兴趣的均衡？

3、均衡可以在多项式时间内求解么？

4、从卖方的角度，假定买家的理性（遵循贝叶斯纳什均衡），如何最优化卖价p获得最大收益？

接下来我们将由浅入深，解决上述问题。

2.3 均衡的迭代表示

类似 [6]的工作，我们这一节将会把贝叶斯纳什均衡与迭代联系在一起。考虑这样的一个迭代过程，从最悲观的状态入手，即初始时所有人均不购买。第一回合，即便身旁所有人均不购买，也有一些人由于$b_i>p$而有一定概率购买；第二回合，有一些买家由于周边的人有非 0 的购买概率，进一步提升自己的购买概率；第三回合，又有一些买家因为第二回合的提高而提高……

在这一节，我们将证明这一过程收敛，并且定义收敛到的概率向量为“悲观均衡”$\underline{\boldsymbol{q}}$。类似地，我们可以定义“乐观均衡”$\overline{\boldsymbol{q}}$，即起初假定所有人都购买，接下来每回合有一部分人降低购买概率……而这两个均衡便是满足定义定义 2-1 的均衡，对应了贝叶斯纳什均衡。

① 严格地说，这里应该是几乎处处取 1，但这并不影响我们的分析。

2.3.1 均衡的迭代定义

下面，我们用数学的语言来定义这一迭代过程，并叙述一些性质。为了简化符号，首先我们重写公式(2-1)，将$v_i \sim U(a_i,b_i)$代入：

$$q_i=\begin{cases} 0, & b_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j\le 0 \\ 1, & a_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j\ge 1 \\ \dfrac{b_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j}{b_i-a_i}, & otherwise \end{cases} \tag{2-3}$$

进一步我们用med中位数函数，写出如下形式：

$$q_i=\mathrm{med}\left\{0,1,\frac{b_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j}{b_i-a_i}\right\} \tag{2-4}$$

由上式启发，我们作如下定义：

定义 2-3：当定价p给定时，定义转移函数$f_p:[0,1]^n\to[0,1]^n$：

$$\left[f_p(\boldsymbol{q})\right]_i=\mathrm{med}\left\{0,1,\frac{b_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j}{b_i-a_i}\right\} \tag{2-5}$$

特别地，$f_p(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}$当且仅当$\boldsymbol{q}$为关于$p$的均衡。注意到$f_p$是连续函数，因为med连续。

定义 2-4：给定$\boldsymbol{q}^1\in[0,1]^n,\boldsymbol{q}^2\in[0,1]^n$，规定关于向量的大小比较：

$$\boldsymbol{q}^1\ge\boldsymbol{q}^2\Leftrightarrow\forall 1\le i\le n, q_i^1\ge q_i^2$$

类似地我们可以定义$\boldsymbol{q^1}\le\boldsymbol{q}^2$。

关于$f_p(\boldsymbol{q})$最重要的性质，是它的单调性。首先是关于$\boldsymbol{q}$的单调性：给定p以及$\boldsymbol{q^1}\ge\boldsymbol{q^2}$，有$f_p(\boldsymbol{q}^1)\ge f_p(\boldsymbol{q}^2)$。这是因为由条件$T_{ij}\ge 0$，可以推出

$$\begin{aligned}\left[f_p(\boldsymbol{q^1})\right]_i&=\mathrm{med}\left\{0,1,\frac{b_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j^1}{b_i-a_i}\right\}\ge\mathrm{med}\left\{0,1,\frac{b_i-p+\sum_{j\neq i}T_{ji}q_j^2}{b_i-a_i}\right\}\\&=\left[f_p(\boldsymbol{q^2})\right]_i\end{aligned}$$

其次是关于p的单调性：给定$p_1\le p_2$以及$\boldsymbol{q}$，满足$f_{p_1}(\boldsymbol{q})\ge f_{p_2}(\boldsymbol{q})$，原因与上述分析相同。当然我们也可以如下地陈述$f_p(\boldsymbol{q})$的联合单调性：

命题 2-2：给定$p_1\le p_2,\boldsymbol{q}^1\ge\boldsymbol{q}^2$，$f$满足$f_{p_1}(\boldsymbol{q}^1)\ge f_{p_2}(\boldsymbol{q}^2)$。

至此，我们可以严格定义本节开始时提到的“悲观状态”和“乐观状态”

定义 2-5：给定p，引入记号$f_p^{(m)}(\boldsymbol{q})=f_p(f_p(\dots f_p(\boldsymbol{q})\dots))$，其中函数$f_p$被作用$m$次；$\boldsymbol{0}=(0,\dots 0),\boldsymbol{1}=(1,\dots,1)$。定义：

$$悲观均衡：\underline{\boldsymbol{q}}(p) = \lim_{m\to\infty} f_p^{(m)}(\mathbf{0})$$
$$乐观均衡：\overline{\boldsymbol{q}}(p) = \lim_{m\to\infty} f_p^{(m)}(\mathbf{1})$$

我们需要说明这里的定义是合理的。首先极限收敛，因为$f_p^{(m)}(\mathbf{0})$关于m单调增，且有上界$\mathbf{1}$；$f_p^{(m)}(\mathbf{1})$关于m单调减，且有下界$\mathbf{0}$。当极限存在时，我们用$f_p^{(\infty)}$表示该极限。再由定义 2-3 中提到的f_p的连续性，知$f_p(\underline{\boldsymbol{q}}(p)) = \underline{\boldsymbol{q}}(p)$以及$f_p\big(\overline{\boldsymbol{q}}(p)\big) = \overline{\boldsymbol{q}}(p)$，也就是$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$与$\overline{\boldsymbol{q}}(p)$确实为关于价格$p$的均衡。

2.3.2 均衡的性质

下面我们将给出关于均衡的一些性质，他们将在后文的证明过程中起到至关重要的作用。

命题 2-3：均衡满足以下性质：

a) 给定p，$\underline{\boldsymbol{q}}(p) \le \overline{\boldsymbol{q}}(p)$;

b) 给定p，任给均衡$\boldsymbol{q}$，有$\underline{\boldsymbol{q}}(p) \le \boldsymbol{q} \le \overline{\boldsymbol{q}}(p)$;

c) 给定p，任给不超过$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$的概率向量$\boldsymbol{q} \le \underline{\boldsymbol{q}}(p)$，有$\underline{\boldsymbol{q}}(p) = f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q})$，即悲观均衡不一定要从$\mathbf{0}$向量开始迭代；类似地，任给$\boldsymbol{q} \ge \overline{\boldsymbol{q}}(p)$，有$\overline{\boldsymbol{q}}(p) = f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q})$;

d) 给定价格$p_1 \le p_2$，有$\underline{\boldsymbol{q}}(p_1) \ge \underline{\boldsymbol{q}}(p_2)$，$\overline{\boldsymbol{q}}(p_1) \ge \overline{\boldsymbol{q}}(p_2)$

证明：

a) 显然$\mathbf{0} \le \mathbf{1}$，再由$f_p$的单调性知$f_p(\mathbf{0}) \le f_p(\mathbf{1}) \Rightarrow f_p^{(\infty)}(\mathbf{0}) \le f_p^{(\infty)}(\mathbf{1})$;

b) 由均衡的定义，$\boldsymbol{q} = f_p(\boldsymbol{q}) = f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q})$，再根据$\mathbf{0} \le \boldsymbol{q} \le \mathbf{1}$以及$f_p$的单调性：
$$f_p(\mathbf{0}) \le f_p(\boldsymbol{q}) \le f_p(\mathbf{1}) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_p^{(\infty)}(\mathbf{0}) \le f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q}) \le f_p^{(\infty)}(\mathbf{1});$$

c) 由对称性，我们只需要证明前一半命题。已知$f_p(\underline{\boldsymbol{q}}(p)) = \underline{\boldsymbol{q}}(p)$，再由$f_p$的单调性：
$$\begin{aligned} \mathbf{0} \le \boldsymbol{q} \le \underline{\boldsymbol{q}}(p) &\Rightarrow f_p(\mathbf{0}) \le f_p(\boldsymbol{q}) \le f_p(\underline{\boldsymbol{q}}(p)) \Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow f_p^{(\infty)}(\mathbf{0}) \le f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q}) \le f_p^{(\infty)}(\underline{\boldsymbol{q}}(p)) \\ &\Rightarrow \underline{\boldsymbol{q}}(p) \le f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q}) \le \underline{\boldsymbol{q}}(p) \end{aligned}$$
注意最后一个"$\Rightarrow$"是因为$f_p^{(\infty)}(\mathbf{0}) = \underline{\boldsymbol{q}}(p) = f_p(\underline{\boldsymbol{q}}(p)) = \cdots = f_p^{(\infty)}(\underline{\boldsymbol{q}}(p))$，而$f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q}) = \lim_{m\to\infty} f_p^{(m)}(\boldsymbol{q})$这一极限的存在性，通过$f_p^{(m)}(\mathbf{0}) \le f_p^{(m)}(\boldsymbol{q}) \le f_p^{(m)}(\underline{\boldsymbol{q}}(p))$这一夹逼过程保证。

d) 这一次我们需要重复使用f的联合单调性（命题 2-2）。

$$p_1 \le p_2 \wedge \mathbf{0} \ge \mathbf{0} \Rightarrow f_{p_1}(\mathbf{0}) \ge f_{p_2}(\mathbf{0})$$

$$p_1 \le p_2 \wedge f_{p_1}(\mathbf{0}) \ge f_{p_2}(\mathbf{0}) \Rightarrow f_{p_1}^{(2)}(\mathbf{0}) \ge f_{p_2}^{(2)}(\mathbf{0})$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow f_{p_1}^{(\infty)}(\mathbf{0}) \ge f_{p_2}^{(\infty)}(\mathbf{0}) \Rightarrow \underline{\boldsymbol{q}}(p_1) \ge \underline{\boldsymbol{q}}(p_2)$$

类似地我们也有$\overline{\boldsymbol{q}}(p_1) \ge \overline{\boldsymbol{q}}(p_2)$■

2.4 核心算法

2.4.1 一个指数复杂度的例子

上一节我们用迭代的方法定义了悲观均衡、乐观均衡，那么给定价格p，是否能在多项式时间内求解出$\underline{\boldsymbol{q}}, \overline{\boldsymbol{q}}$？直接进行迭代模拟是不能满足这一要求的，看如下的例子：

$$\begin{bmatrix} & p = 1; & \\ [a_1, b_1] = [0,2], & [a_i, b_i] = [0,1] (2 \le i \le n) & \\ T_{i,i+1} = 0.5\ (1 \le i \le n-2), & T_{n-1,n} = T_{n,n-1} = 1, & 其它T_{ij} = 0 \end{bmatrix}$$

在这个例子下，$f_p^{(n-2)}(\mathbf{0}) = (1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{n-2}, 0, 0)$，计算可以发现

$$f_p^{(n-2+2k)}(\mathbf{0}) = (1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{n-2}, k/2^{n-1}, k/2^{n-1}), \qquad 0 \le k \le 2^{n-2}$$

$$f_p^{(n-2+2k+1)}(\mathbf{0}) = (1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{n-2}, (k+1)/2^{n-1}, k/2^{n-1}), 0 \le k < 2^{n-2}$$

$$f_p^{(\infty)}(\mathbf{0}) = (1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{n-2}, 1, 1)$$

可见我们需要指数$\Omega(2^n)$次迭代才能获得稳态解，必须另辟蹊径。在接下来的章节里，我们将介绍扫描法（line sweep method）。这一方法不仅可以在多项式时间内，求得悲观均衡、乐观均衡，同时也可以选取最优的价格p。

2.4.2 扫描法（Line Sweep Method）

不失一般性，我们只介绍求解悲观均衡即$\underline{\boldsymbol{q}}$的算法，因为计算$\overline{\boldsymbol{q}}$的方法是类似的。定义结构函数：

定义 2-6：给定向量$\boldsymbol{q} \in [0,1]^n$，定义结构函数$S: [0,1]^n \to \{0, \star, 1\}^n$，满足：

$$[S(\boldsymbol{q})]_i = \begin{cases} 0, & q_i = 0 \\ \star, & q_i \in (0,1) \\ 1, & q_i = 1 \end{cases} \tag{2-6}$$

这里我们称$\{0, \star, 1\}^n$中的元素为**结构(structure)**，并且记$\boldsymbol{q} \sim S(\boldsymbol{q})$

扫描法基于如下的事实：价格 p足够大时，显然$\underline{\boldsymbol{q}}(p) = \mathbf{0}$。逐渐降低$p$，在某一时刻$p = p_1$，悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$开始出现非零值，产生了**结构变化(structure** change）。而在区间$p \in (p_2, p_1)$内，悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$的结构不发生改变，下一次“结构变化”发生在$p = p_2$……严格来说，存在临界价格$p_1 > p_2 > \cdots > p_m$，使得：

$$\underline{\boldsymbol{q}}((p_1, \infty)) \sim \boldsymbol{s}^0 = \boldsymbol{0}$$
$$\underline{\boldsymbol{q}}((p_2, p_1)) \sim \boldsymbol{s}^1 \in \{0, \star, 1\}^n$$
$$\cdots$$
$$\underline{\boldsymbol{q}}((p_m, p_{m-1})) \sim \boldsymbol{s}^{m-1} \in \{0, \star, 1\}^n$$
$$\underline{\boldsymbol{q}}((-\infty, p_m)) \sim \boldsymbol{s}^m = \boldsymbol{1}$$

这一现象在我们接下来的算法构造中将不证自明。注意到，根据命题 2-3-d)，悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$满足单调性，故结构也满足单调性[①]$\boldsymbol{0} \le \boldsymbol{s}^1 \le \cdots \le \boldsymbol{s}^{m-1} \le \boldsymbol{1}$，结构变化总数$m \le 2n$（每一位$1 \le i \le n$最多发生两次结构变化$0 \to \star$与$\star \to 1$）。而在临界价格分隔的区间内（譬如$(p_2, p_1)$内），我们将会看到$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$是关于$p$的线性函数，因此卖家的总收益$p \cdot \sum_i \underline{q}_i(p)$是关于$p$的二次函数，极值易求。

综上所述，倘若可以求得临界价格，以及对应的以p为线性函数的悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$，便可以容易地求解全局最佳售价。这一售价即假定所有买家的理性（遵循贝叶斯均衡）后的，最大化卖家收益的定价。在本章接下来的部分，我们先介绍增加了一个限定条件的扫描法，但在最后将去除这一限制。

2.5 对角优限制下的扫描法

定义$L_{ij} = T_{ji}/(b_i - a_i)$，并规定$L_{ii} = T_{ii} = 0$。在这一节里，我们为原问题添加一个对影响因子的限制：$I - L$严格行主对角优，即$\sum_j L_{ij} = \sum_j T_{ji}/(b_i - a_i) < 1$。在这一限制下，我们将会看到问题被化简，甚至均衡唯一，即$\underline{\boldsymbol{q}}(p) = \overline{\boldsymbol{q}}(p)$。在下一节我们将介绍去除这一条件后的改进算法。

我们的扫描法在结构为$\boldsymbol{s}$的时刻，维护分割$Z \cup W \cup O = [n]$，分别称之为零集(zero set)、工作集(working set)和壹集(one set)。其中

$$s_i = 0(\forall i \in Z), \qquad s_i = \star\ (\forall i \in W), \qquad s_i = 1(\forall i \in O)$$

我们用$\boldsymbol{x}_W$表示向量$\boldsymbol{x}$在指标集W上的限制，并且规定$\langle \boldsymbol{x}_Z, \boldsymbol{x}_W, \boldsymbol{x}_O \rangle = \boldsymbol{x}$。用$L_{W \times W}$表示矩阵$L$在$W \times W$上的限制，$f|_W$表示函数$f$在$W$上的限制。

[①]这里结构之间的比较与概率向量$\boldsymbol{q}$类似，按位定义。

2.5.1 算法细节与证明

扫描法的第一个临界点$p_1 = \max_{1\le i\le n} b_i$。当价格$p > p_1$时，满足结构$\boldsymbol{s}^0 = \boldsymbol{0}$；当价格$p < p_1$时，向量$\underline{\boldsymbol{q}}$开始出现非零值。设$\boldsymbol{q}^1 = \underline{\boldsymbol{q}}(p_1) = \boldsymbol{0}$。

假设当前我们已经扫描到临界点p_t，已知悲观均衡$\boldsymbol{q}^t = \underline{\boldsymbol{q}}(p_t)$和结构向量$\boldsymbol{s}^{t-1}$，并且满足右连续条件$\boldsymbol{q}^t = \lim_{p\to p_t^+} \underline{\boldsymbol{q}}(p)$，我们的目标是求解下一个临界点$p_{t+1} < p_t$，下一个结构$\boldsymbol{s}^t$，以及$\forall p \in [p_{t+1}, p_t)$时的$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$。

注意上述条件在$t = 1$时都是自动满足的。

定义 2-7：假定所有的向量均为列向量，我们定义与f_p略微不同的函数$g_p: [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$，满足：

$$[g_p(\boldsymbol{q})]_i = \frac{b_i - p + \sum_{j\neq i} T_{ji} q_j}{b_i - a_i} = \frac{b_i - p}{b_i - a_i} + [L\boldsymbol{q}]_i$$

函数f_p与g_p的关系是

$$[f_p]_i = \mathrm{med}\left\{0,1,[g_p]_i\right\} = \begin{cases} 0, & if\ [g_p]_i < 0 \\ 1, & if\ [g_p]_i > 1 \\ [g_p]_i, & otherwise \end{cases}$$

若设$\boldsymbol{x} = \left(\frac{b_1-p_t}{b_1-a_1}, \frac{b_1-p_t}{b_1-a_1}, \dots, \frac{b_n-p_t}{b_n-a_n}\right)^T$，$\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{b_1-a_1}, \frac{1}{b_2-a_2}, \dots, \frac{1}{b_n-a_n}\right)^T$，则对于$p = p_t - \epsilon$有简单的矩阵表达：$g_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{y} + L\boldsymbol{q}$。

假设$p \in (p_t, p_{t-1})$时的结构向量$\boldsymbol{s}^{t-1}$满足分割$Z \cup W \cup O = [n]$。根据结构的定义 2-6，g_p的定义 2-7，以及均衡的右连续性$\boldsymbol{q}^t = \lim_{p\to p_t^+} \underline{\boldsymbol{q}}(p)$，知：

$$\begin{aligned} \forall i \in Z, \left[g_{p_t}(\boldsymbol{q}^t)\right]_i &= [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i \le 0 \\ \forall i \in W, \left[g_{p_t}(\boldsymbol{q}^t)\right]_i &= [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i \in (0,1] \\ \forall i \in O, \left[g_{p_t}(\boldsymbol{q}^t)\right]_i &= [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i \ge 1 \end{aligned} \tag{2-7}$$

据此，我们对结构做如下调整：

Step 1：对于$i \in Z$，倘若$[\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i = 0$，我们将$i$从$Z$集合移入$W$集合；对于$i \in W$，倘若$[\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i = 1$，我们将$i$从$W$集合移入$O$集合。

我们很快会看到，经过 Step 1 的处理后，新的分割与$\boldsymbol{s}^t$相容，即这些“结构变化”恰好是p从$p_t + \epsilon$变为$p_t - \epsilon$时，悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$经历的那些结构变化。此外，在 Step 1 之后，分割满足如下性质：

$$\begin{aligned} \forall i \in Z, \left[g_{p_t}(\boldsymbol{q}^t)\right]_i &= [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i < 0 \\ \forall i \in W, \left[g_{p_t}(\boldsymbol{q}^t)\right]_i &= [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i \in [0,1) \\ \forall i \in O, \left[g_{p_t}(\boldsymbol{q}^t)\right]_i &= [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i \ge 1 \end{aligned} \tag{2-8}$$

在接下来的两步中，我们计算关于ϵ的线性向量$\boldsymbol{r}(\epsilon)$，以及一个阈值ϵ_{min}。我们会在引理 2-2 中看见，对于所有$0 < \epsilon \le \epsilon_{min}$，关于定价$p = p_t - \epsilon$的悲观均衡恰好是$\langle \mathbf{0}_Z, \boldsymbol{r}_W(\epsilon), \mathbf{1}_O \rangle$。

Step 2：定义向量$\boldsymbol{r}(\epsilon) \in \mathbb{R}^n$*，令*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_W(\epsilon) &= \epsilon(I - L_{W\times W})^{-1}\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t \\ &= \epsilon(I - L_{W\times W})^{-1}\boldsymbol{y}_W + [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_W \end{aligned} \tag{2-9}$$

将其延拓至集合Z*和*O*：*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_Z(\epsilon) &= \boldsymbol{x}_Z + \epsilon\boldsymbol{y}_Z + L_{Z\times W}\boldsymbol{r}_W(\epsilon) + L_{Z\times O}\mathbf{1}_O \\ &= \epsilon(\boldsymbol{y}_Z + L_{Z\times W}(I - L_{W\times W})^{-1}\boldsymbol{y}_W) + [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_Z \\ \boldsymbol{r}_O(\epsilon) &= \boldsymbol{x}_O + \epsilon\boldsymbol{y}_O + L_{O\times W}\boldsymbol{r}_W(\epsilon) + L_{O\times O}\mathbf{1}_O \\ &= \epsilon(\boldsymbol{y}_O + L_{O\times W}(I - L_{W\times W})^{-1}\boldsymbol{y}_W) + [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_O \end{aligned} \tag{2-10}$$

我们看到$\boldsymbol{r}(\epsilon)$*是关于*ϵ*的线性函数，故设*

$$\boldsymbol{r}(\epsilon) = \epsilon\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t), \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$$

Step 3：计算阈值：

$$\epsilon_{min} = \min\left\{\min_{i\in Z}\left\{\frac{0 - [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i}{v_i}\right\}, \min_{i\in W}\left\{\frac{1 - [\boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}^t]_i}{v_i}\right\}\right\} \tag{2-11}$$

首先我们说明(2-11)定义的合理性。

引理 2-1：$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_+^n$并且$\epsilon_{min} > 0$。

证明：由于$I - L_{W\times W}$主对角优，知$L_{W\times W}$的特征值的模均小于 1，由简单的复分析知有如下极限：

$$\boldsymbol{v}_W = (I - L_{W\times W})^{-1}\boldsymbol{y}_W = (I + L_{W\times W} + L_{W\times W}^2 + \cdots)\boldsymbol{y}_W \tag{2-12}$$

因为$L_{W\times W}$是非负矩阵，且$\boldsymbol{y}$向量严格正，故$\boldsymbol{v}_W \in \mathbb{R}_+^{|W|}$。此外，回忆(2-10)知$\boldsymbol{v}_Z = \boldsymbol{y}_Z + L_{Z\times W}\boldsymbol{v}_W \in \mathbb{R}_+^{|Z|}, \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{y}_O + L_{O\times W}\boldsymbol{v}_W \in \mathbb{R}_+^{|O|}$，因而$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_+^n$。最后结合条件(2-8)，带入$\epsilon_{min}$的定义我们不难看到$\epsilon_{min} > 0$。■

接下来的引理告诉我们，上文中的(2-9)其实已经给出了$p \in [p_t - \epsilon_{min}, p_t)$时的悲观均衡。

引理 2-2：$\forall 0 < \epsilon \le \epsilon_{min}$，$\underline{\boldsymbol{q}}(p_t - \epsilon) = \langle \mathbf{0}_Z, \boldsymbol{r}_W(\epsilon), \mathbf{1}_O \rangle$。

证明：考虑价格$p = p_t - \epsilon$，我们的目标是算出$f_p^{(\infty)}(\mathbf{0}) = f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q}^t)$。这一等号是根据：

$$\text{命题 2-3d)} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{q}^t = \underline{\boldsymbol{q}}(p_t) \le \underline{\boldsymbol{q}}(p) \xrightarrow{\text{命题}\mathbf{2-3}\text{c)}} \underline{\boldsymbol{q}}(p) = f_p^{(\infty)}(\mathbf{0}) = f_p^{(\infty)}(\boldsymbol{q}^t)$$

为了简化符号，规定$\boldsymbol{x}_W' \coloneqq \boldsymbol{x}_W + L_{W\times O}\mathbf{1}_O$为常向量，此时由均衡的定义：

$$\boldsymbol{q}_W^t = \boldsymbol{x}'_W + L_{W\times W}\boldsymbol{q}_W^t \quad (\star)$$

利用函数f的单调性（重复运用命题 2-2），我们做如下分析[①]：

$$\begin{cases} f_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q}^t) \geq \langle \mathbf{0}_Z, \epsilon\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t, \mathbf{1}_O\rangle \\ f_{p_t-\epsilon}^{(2)}(\boldsymbol{q}^t) \geq f_{p_t-\epsilon}(\langle \mathbf{0}_Z, \epsilon\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t, \mathbf{1}_O\rangle) \\ \qquad\qquad \geq \langle \mathbf{0}_Z, \boldsymbol{x}'_W + \epsilon\boldsymbol{y}_W + L_{W\times W}(\epsilon\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t), \mathbf{1}_O\rangle \\ \qquad\qquad \overset{(\star)}{=} \langle \mathbf{0}_Z, \epsilon(I + L_{W\times W})\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t, \mathbf{1}_O\rangle \\ \qquad\qquad \dots \\ f_{p_t-\epsilon}^{(m)}(\boldsymbol{q}^t) \geq \langle \mathbf{0}_Z, \epsilon(I + L_{W\times W} + \dots + L_{W\times W}^{m-1})\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t, \mathbf{1}_O\rangle \end{cases} \tag{2-13}$$

对(2-13)中的不等式取极限$m \to \infty$，可知：

$$\underline{\boldsymbol{q}}(p_t - \epsilon) = f_{p_t-\epsilon}^{(\infty)}(\boldsymbol{q}^t) \geq \langle \mathbf{0}_Z, \epsilon(I - L_{W\times W})^{-1}\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t, \mathbf{1}_O\rangle = \langle \mathbf{0}_Z, \boldsymbol{r}_W(\epsilon), \mathbf{1}_O\rangle$$

设$\boldsymbol{q}' = \langle \mathbf{0}_Z, \boldsymbol{r}_W(\epsilon), \mathbf{1}_O\rangle$。只要$0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{min}$，一定有

$$\begin{cases} [g_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q}')]_W = \boldsymbol{r}_W(\epsilon) \in [0,1]^{|W|} \\ [g_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q}')]_Z = \boldsymbol{r}_Z(\epsilon) \leq \mathbf{0}_Z \\ [g_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q}')]_O = \boldsymbol{r}_O(\epsilon) \geq \boldsymbol{r}_O(0) \geq \mathbf{1}_O \end{cases}$$

根据f与g的关系，我们知道$f_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q}') = \boldsymbol{q}'$，即$\boldsymbol{q}'$已经是一个均衡。利用命题 2-3b) 以及$\underline{\boldsymbol{q}}(p_t - \epsilon) \geq \boldsymbol{q}'$知只能有$\underline{\boldsymbol{q}}(p_t - \epsilon) = \boldsymbol{q}'$，这表明 Step 1 中的分割定义是合理的。■

令$p_{t+1} = p_t - \epsilon_{min}$，$\boldsymbol{q}^{t+1} = \langle \mathbf{0}_Z, \boldsymbol{r}_W(\epsilon_{min}), \mathbf{1}_O\rangle$。事实上下一个结构变化将发生在$p_{t+1}$处。这是因为根据$\epsilon_{min}$的定义，一定存在某个

$$i \in W \wedge [\boldsymbol{x} + \epsilon_{min}\boldsymbol{y} + L\boldsymbol{q}^{t+1}]_i = 1 \text{ 或者} i \in Z \wedge [\boldsymbol{x} + \epsilon_{min}\boldsymbol{y} + L\boldsymbol{q}^{t+1}]_i = 0$$

由此可见，在下一个循环开始时，i将相应地进入壹集O或者工作集W。根据引理 2-2，下一个循环$t \to t+1$处的右连续条件$\boldsymbol{q}^{t+1} = \lim_{p\to p_{t+1}^+}\underline{\boldsymbol{q}}(p)$依然满足，故我们可以循环地执行上述三个步骤。这里我们将伪代码总结在算法 1 中。

在这里做一个说明。ConstrainedLineSweepMethod 的返回值是一个函数$\underline{\boldsymbol{q}}$，它给出了任意定价$p \in \mathbb{R}$下的悲观均衡。此外，$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$是一个关于$p$的分段线性函数，分段个数不超过$2n+1$。为了简便起见，我们忽略储存函数$\underline{\boldsymbol{q}}$的具体方式（这当然是简单的），并且在算法 1 中的 14 行那里，一段一段赋值。

[①]这其中利用了下面的性质

$$\epsilon(I + L_{W\times W} + \dots + L_{W\times W}^{m-1})\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t \leq \epsilon_{min}(I - L_{W\times W})^{-1}\boldsymbol{y}_W + \boldsymbol{q}_W^t \leq \mathbf{1}_W$$

***Algorithm 1**: ConstrainedLineSweepMethod*

Input: $n, T, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Output: The pessimistic equilibrium function $\underline{\boldsymbol{q}}: p \mapsto \underline{\boldsymbol{q}}(p)$.

1. $L_{ij} \leftarrow T_{ji}/(b_i - a_i)$;
2. $p_1 \leftarrow \max_{1\le i\le n} b_i$;
3. $\underline{\boldsymbol{q}}(p)|_{[p_1,\infty)} \leftarrow \boldsymbol{0}$;
4. $Z \leftarrow [n]$; $W \leftarrow \emptyset$; $O \leftarrow \emptyset$; $t \leftarrow 1$;
5. **While** $\underline{\boldsymbol{q}}(p_t) \neq \boldsymbol{1}$ **Do**
6. $\boldsymbol{q}^t \leftarrow \underline{\boldsymbol{q}}(p_t)$;
7.   **For all** $i \in Z$ s.t. $(b_i - p_t)/(b_i - a_i) + \sum_j L_{ij} q_j^t = 0$ **Do**
           $Z \leftarrow Z \setminus \{i\}$; $W \leftarrow W \cup \{i\}$;
8.   **For all** $i \in$ W s.t. $(b_i - p_t)/(b_i - a_i) + \sum_j L_{ij} q_j^t = 1$ **Do**
           $W \leftarrow W \setminus \{i\}$; $O \leftarrow O \cup \{i\}$;
9. $\boldsymbol{y} \leftarrow (1/(b_1 - a_1), 1/(b_2 - a_2), \dots, 1/(b_n - a_n))^T$;
10. $\boldsymbol{v}_W \leftarrow (I - L_{W\times W})^{-1} \boldsymbol{y}_W$; {See Eq. (2-9)}
11. $\boldsymbol{v}_Z \leftarrow \boldsymbol{y}_Z + L_{Z\times W} \boldsymbol{v}_W$; {See Eq. (2-10)}
12. $\epsilon_{min} = \min\left\{\min_{i\in Z}\left\{\frac{0-[\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{q}^t]_i}{v_i}\right\}, \min_{i\in W}\left\{\frac{1-[\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{q}^t]_i}{v_i}\right\}\right\}$; {See Eq. (2-11)}
13. $p_{t+1} \leftarrow p_t - \epsilon_{min}$;
14. $\underline{\boldsymbol{q}}(p)|_{[p_{t+1},p_t)} \leftarrow \langle \boldsymbol{0}_Z, \boldsymbol{r}_W(p_t - p), \boldsymbol{1}_O \rangle$;
15. $t \leftarrow t + 1$;
16. **End While**
17. $\underline{\boldsymbol{q}}(p)|_{(-\infty,p_t)} \leftarrow \boldsymbol{1}$;
18. **Return** $\underline{\boldsymbol{q}}$;

2.5.2 结论

根据上一节的分析，以及结构变化的总次数$m \le 2n$，我们得出：

定理 2-1：当矩阵$I - L$行主对角严格占优时，算法 1 在多项式时间内，可以求解任意价格p对应的悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$，并可求出最大收益。

事实上，“行主对角严格占优”是一个很强的条件，在此条件下我们甚至可以证明均衡唯一：

定理 2-2：当矩阵$I - L$行主对角严格占优时，对任意价格p，$\underline{\boldsymbol{q}}(p) = \overline{\boldsymbol{q}}(p)$。

证明：反设在价格p下存在两个不同的均衡$\boldsymbol{q}^1 \le \boldsymbol{q}^2$，与前文类似，令

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{b_1 - p}{b_1 - a_1}, \frac{b_1 - p}{b_1 - a_1}, \dots, \frac{b_n - p}{b_n - a_n}\right)^T$$

则有$g_p(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{x} + L\boldsymbol{q}$。由于

$$\left[f_p(\boldsymbol{q})\right]_i = \mathrm{med}\left\{0, 1, \left[g_p(\boldsymbol{q})\right]_i\right\}$$

我们知道$\boldsymbol{0} \le f_p(\boldsymbol{q}^2) - f_p(\boldsymbol{q}^1) \le g_p(\boldsymbol{q}^2) - g_p(\boldsymbol{q}^1) = L(\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^1)$。但是由均衡的定义，$f_p(\boldsymbol{q}^1) = \boldsymbol{q}^1, f_p(\boldsymbol{q}^2) = \boldsymbol{q}^2$，即我们得到了

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^1 \le L(\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^1) \Rightarrow (I - L)(\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^1) \le \mathbf{0}$$

设$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^1 \ge \mathbf{0}$，选取$i = \mathrm{argmax}_i \Delta_i$，有$\Delta_i > 0$，可以看到

$$[(I - L)\boldsymbol{\Delta}]_i = \Delta_i - \sum\nolimits_j L_{ij}\Delta_j > \sum\nolimits_j L_{ij}\left(\Delta_i - \Delta_j\right) \ge 0$$

矛盾。故只能有$\boldsymbol{q}^1 = \boldsymbol{q}^2$。 ■

在释放主对角优这一个附加条件后，问题的难度大大增加，这可以从一个简单的例子看到：

假定只有$n = 2$个买家，$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [0,1]$，$T_{12} = T_{21} = 100$。不难验证当$p \ge 1$时有$\underline{\boldsymbol{q}}(p) = (0,0)^T$；当$p < 1$时有$\underline{\boldsymbol{q}}(p) = (1,1)^T$。

这个困难的表象，是出现了均衡的“跳变”，即$\underline{\boldsymbol{q}}(1) \ne \lim_{p \to 1-} \underline{\boldsymbol{q}}(p)$。我们的算法 1 事实上同时保证了$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$的左、右连续，而在释放主对角优以后，只有右连续性存在。更重要的是，这里的$p = p_t - \epsilon$对应的结构$\boldsymbol{s}^t$不能一次性求出（回忆算法 1 的 5、6 行），甚至p从$p_t + \epsilon$到$p_t - \epsilon$的过程中，可能出现$0 \to 1$的二级跃变，没有分别经历$0 \to \star \to 1$。

这一个困难的深层原因，是由于以下极限不再成立

$$(I - L_{W \times W})^{-1} \ne \lim_{m \to \infty}(I + L_{W \times W} + \cdots + L_{W \times W}^{m-1})$$

它导致公式(2-12)不再成立。

2.6 无限制的扫描法

据上文分析，在 Step 2 中，如果$L_{W \times W}$最大特征值的模不小于 1，我们需要另辟蹊径。我们将证明如果出现这一情形，那么在 Step 1 中求得的“结构变化”不完整，即当p从$p_t + \epsilon$变为$p_t - \epsilon$时，还有一些结构变化被忽略了。为此，我们介绍一个调整的策略，它将：

1) 在 Step 1 的基础上，继续对结构作出调整：选出一个工作集的元素$k \in W$进入壹集O。
2) 缩小问题规模到$[n] \setminus (O \cup \{k\}) = Z \cup W \setminus \{k\}$并递归，求出子问题的悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}'(p_t - \epsilon)$，以及$\epsilon'_{min}$。通过它们可以证明原问题的下一个结构变化点$p_{t+1} = p_t - \epsilon'_{min}$以及悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p_t - \epsilon) = \langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p_t - \epsilon), \mathbf{1}_{O \cup \{k\}} \rangle$。

为此，我们先介绍一个引理（证明参见 [22]第 503 页的定理 8.3.1）：

引理 2-3： 给定非负矩阵M（即$\forall i, j\ M_{ij} \ge 0$），存在一个非零的特征向量$\boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}$满足$M\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$。其中$\lambda$为实数，等于$M$的所有特征值的最大模。

由于$L_{W\times W}$是非负矩阵，根据引理存在非零向量$\boldsymbol{u}_W\geq \boldsymbol{0}_W$满足$L_{W\times W}\boldsymbol{u}_W=\lambda\boldsymbol{u}_W$且$\lambda\geq 1$。我们将$\boldsymbol{u}_W$延展到完整的$[n]$上，定义$\boldsymbol{u}_{Z\cup O}=\boldsymbol{0}_{Z\cup O}$。取：

$$k=\underset{k\in W,u_k\neq 0}{\operatorname{argmin}}\frac{1-q_k^t}{u_k} \tag{2-14}$$

由于$\boldsymbol{u}_W\neq \boldsymbol{0}_W$，上式有定义；再根据(2-8)和$\boldsymbol{u}_W\geq \boldsymbol{0}_W$，知$\frac{1-q_k^t}{u_k}>0$。接下来的引理告诉我们，在$p=p_t$处至少还要发生一个结构变化，即$k$从工作集$W$进入壹集$O$。注意到这个元素$k$可能源自零集$Z$，是在 Step 1 中被移入了$W$。这部分解释了前文中提到的形如$0\rightarrow 1$的跳跃。

引理 2-4：$\forall\epsilon>0$，$[\underline{q}(p_t-\epsilon)]_k=1$。

证明：首先可以找到一个$\delta>0$满足$\delta\boldsymbol{u}\leq\epsilon\boldsymbol{y}$（由于$y_i>0\forall i$，这样的$\delta$一定存在）。并且由于$\delta$可以任意小，我们不妨设$\delta=\left(\frac{1-q_k^t}{u_k}\right)/(1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-1})$，其中$m$足够大。

类似$f_{p_t-\epsilon}$我们定义$h:[0,1]^n\rightarrow[0,1]^n$：

$$\begin{cases}[f_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q})]_i=\operatorname{med}\{0,1,x_i+\epsilon y_i+[L\boldsymbol{q}]_i\}\\ \quad [h(\boldsymbol{q})]_i=\operatorname{med}\{0,1,x_i+\delta u_i+[L\boldsymbol{q}]_i\}\end{cases}$$

我们依然有$\boldsymbol{q}_W^t=\boldsymbol{x}_W'+L_{W\times W}\boldsymbol{q}_W^t$成立，此时类似(2-13)我们作如下分析[①]：

$$\begin{aligned}f_{p_t-\epsilon}(\boldsymbol{q}^t)&\geq h(\boldsymbol{q}^t)\geq\langle\boldsymbol{0}_Z,\boldsymbol{x}_W'+\delta\boldsymbol{u}_W+L_{W\times W}\boldsymbol{q}_W,\boldsymbol{1}_O\rangle\\ &=\langle\boldsymbol{0}_Z,\delta\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t,\boldsymbol{1}_O\rangle\\ f_{p_t-\epsilon}^{(2)}(\boldsymbol{q}^t)&\geq h(\langle\boldsymbol{0}_Z,\delta\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t,\boldsymbol{1}_O\rangle)\\ &\geq\langle\boldsymbol{0}_Z,\delta(I+L_{W\times W})\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t,\boldsymbol{1}_O\rangle\\ &=\langle\boldsymbol{0}_Z,\delta(1+\lambda)\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t,\boldsymbol{1}_O\rangle\\ &\cdots\\ f_{p_t-\epsilon}^{(m)}(\boldsymbol{q}^t)&\geq\langle\boldsymbol{0}_Z,\delta(1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-1})\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t,\boldsymbol{1}_O\rangle\\ &=\langle\boldsymbol{0}_Z,\left(\frac{1-q_k^t}{u_k}\right)\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t,\boldsymbol{1}_O\rangle\end{aligned}$$

而根据我们k的选取，可以知道$\left[\langle\boldsymbol{0}_Z,\left(\frac{1-q_k^t}{u_k}\right)\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t,\boldsymbol{1}_O\rangle\right]_k=1$，即$\forall\epsilon>0$，都有$[\underline{\boldsymbol{q}}(p_t-\epsilon)]_k\geq[f_{p_t-\epsilon}^{(m)}(\boldsymbol{q}^t)]_k=1$。故我们让$k$在$p<p_t$时应该从工作集$W$进入壹集$O$。 ■

[①]这其中利用了下面的性质$\forall m_0<m$

$$\delta(1+\lambda+\cdots+\lambda^{m_0-1})\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t\leq\left(\frac{1-q_k^t}{u_k}\right)\boldsymbol{u}_W+\boldsymbol{q}_W^t\leq\boldsymbol{1}_W$$

取$W' = W \setminus \{k\}, O' = O \cup \{k\}$。接下来我们考虑一个$n' = n - |O| < n$的子问题。这个子问题是原问题在$[n] \setminus O'$上的投影，并且假定集合$O'$内的买家一定选择购买：

$$\forall i \in Z \cup W', \qquad [a_i', b_i'] = \left[a_i + \sum\nolimits_{j \in O'} T_{ji}, b_i + \sum\nolimits_{j \in O'} T_{ji}\right] \tag{2-15}$$

通过递归调用扫描法，可以求得任意一个价格p时，子问题的悲观均衡。这一递归过程定会终止，因为每次调用后，问题的规模至少缩小 1。下面一个引理告诉我们，对于任意$p < p_t$，原问题和子问题的悲观均衡是一一对应的。

引理 2-5：$\forall p < p_t$，$\underline{\boldsymbol{q}}(p) = \langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p), \mathbf{1}_{O'} \rangle$，其中$\underline{\boldsymbol{q}}'(p)$是子问题在价格$p$下的悲观均衡。即原问题的均衡，是由子问题的均衡，加上若干个 1 组成的向量。

证明：我们分两步证明。我们首先会说明$\langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p), \mathbf{1}_{O'} \rangle$是价格$p$下的均衡，然后给出悲观均衡的下界$\langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p), \mathbf{1}_{O'} \rangle \leq \underline{\boldsymbol{q}}(p)$。合并这两个结论后，再考虑到命题 2-3a，这将足以说明$\langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p), \mathbf{1}_{O'} \rangle$恰是原问题的悲观均衡。

- 设$\boldsymbol{q} = \langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p), \mathbf{1}_{O'} \rangle$，我们接下来证明$f_p(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}$。根据子问题中$[a_i', b_i']$的定义，我们已经有$\forall i \in [n] \setminus O'$，

$$\begin{aligned}[f_p(\boldsymbol{q})]_i &= \operatorname{med}\left\{0,1, \frac{b_i - p + \sum_{j \in [n]} T_{ji} q_j}{b_i - a_i}\right\} \\ &= \operatorname{med}\left\{0,1, \frac{b_i' - p + \sum_{j \in [n] \setminus O'} T_{ji} q_j}{b_i' - a_i'}\right\} = q_i\end{aligned}$$

  因此我们只需要证明$[f_p(\boldsymbol{q})]_{O'} = \mathbf{1}_{O'}$。反设$[f_p(\boldsymbol{q})]_{O'} \leq \mathbf{1}_{O'}$，并且$\exists i \in O'$使得$[f_p(\boldsymbol{q})]_i < 1$。我们从$f_p(\boldsymbol{q}) \leq \boldsymbol{q}$开始，通过$f$的单调性可知$f_p^{(m)}(\boldsymbol{q}) \leq f_p^{(m-1)}(\boldsymbol{q})$。由于不增且有下界的序列有极限，下式成立

$$\boldsymbol{q}^* = \lim_{m \to \infty} f_p^{(m)}(\boldsymbol{q}) \leq f_p(\boldsymbol{q})$$

  根据函数f的连续性，$\boldsymbol{q}^*$是关于价格p的均衡，但根据命题 2-3b，$[\underline{\boldsymbol{q}}(p)]_i \leq q_i^* \leq [f_p(\boldsymbol{q})]_i < 1$。若$i \in O = O' \setminus \{k\}$，这将与$1 = [\underline{\boldsymbol{q}}(p_t)]_i \leq [\underline{\boldsymbol{q}}(p)]_i$矛盾；若$i = k$，这将与引理 2-4 矛盾。因此只能有$f_p(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}$。

- 我们现在计算悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$的下界。与前半部分的证明类似，我们已经知道$[\underline{\boldsymbol{q}}(p)]_{O'} = \mathbf{1}_{O'}$。设$f_p'$为子问题中的转移函数，并且定义$\bar{O}' = [n] \setminus O'$。通过对子问题的定义，以及连续使用函数$f_p$的单调性，我们作如下推导：

***Algorithm 2**: LineSweepMethod*

Input: $n, T, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Output: The pessimistic equilibrium function $\underline{\boldsymbol{q}}: p \mapsto \underline{\boldsymbol{q}}(p)$.

1. $L_{ij} \leftarrow T_{ji}/(b_i - a_i)$;
2. $p_1 \leftarrow \max_{1 \le i \le n} b_i$;
3. $\underline{\boldsymbol{q}}(p)|_{[p_1,\infty)} \leftarrow \boldsymbol{0}$;
4. $Z \leftarrow [n]$; $W \leftarrow \emptyset$; $O \leftarrow \emptyset$; $t \leftarrow 1$;
5. **While** $\underline{\boldsymbol{q}}(p_t) \neq \boldsymbol{1}$ **Do**
6. $\quad \boldsymbol{q}^t \leftarrow \underline{\boldsymbol{q}}(p_t)$;
7. $\quad$ **For all** $i \in Z$ s.t. $(b_i - p_t)/(b_i - a_i) + \sum_j L_{ij} q_j^t = 0$ **Do**
   $\quad\quad Z \leftarrow Z \setminus \{i\}$; $W \leftarrow W \cup \{i\}$;
8. $\quad$ **For all** $i \in W$ s.t. $(b_i - p_t)/(b_i - a_i) + \sum_j L_{ij} q_j^t = 1$ **Do**
   $\quad\quad W \leftarrow W \setminus \{i\}$; $O \leftarrow O \cup \{i\}$;
9. $\quad$ **If** all eigenvalues of $L_{W\times W}$ are smaller than 1 in norm **Then**
10. $\quad\quad \boldsymbol{y} \leftarrow (1/(b_1 - a_1), 1/(b_2 - a_2), \ldots, 1/(b_n - a_n))^T$;
11. $\quad\quad \boldsymbol{v}_W \leftarrow (I - L_{W\times W})^{-1} \boldsymbol{y}_W$; {See Eq. (2-9)}
12. $\quad\quad \boldsymbol{v}_Z \leftarrow \boldsymbol{y}_Z + L_{Z\times W} \boldsymbol{v}_W$; {See Eq. (2-10)}
13. $\quad\quad \epsilon_{min} = \min\left\{\min_{i\in Z}\left\{\frac{0-[\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{q}^t]_i}{v_i}\right\}, \min_{i\in W}\left\{\frac{1-[\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{q}^t]_i}{v_i}\right\}\right\}$; {See Eq. (2-11)}
14. $\quad\quad p_{t+1} \leftarrow p_t - \epsilon_{min}$;
15. $\quad\quad \underline{\boldsymbol{q}}(p)|_{[p_{t+1},p_t)} \leftarrow \langle \boldsymbol{0}_Z, \boldsymbol{r}_W(p_t - p), \boldsymbol{1}_O \rangle$;
16. $\quad$ **Else**
17. $\quad\quad \boldsymbol{u}_W \leftarrow$ eigenvector of $L_{W\times W}$ with eigenvalue no smaller than 1;
18. $\quad\quad k \leftarrow \operatorname{argmin}_{k\in W, u_k \neq 0}\{(1 - q_k^t)/u_k\}$; {See Eq. (2-14) }
19. $\quad\quad O \leftarrow O \cup \{k\}$; $\bar{O} = [n] \setminus O$;
20. $\quad\quad \forall i \in \bar{O}$, $[a_i', b_i'] \leftarrow [a_i + \sum_{j\in O} T_{ji}, b_i + \sum_{j\in O} T_{ji}]$; {See Eq. (2-15)}
21. $\quad\quad \underline{\boldsymbol{q}}' \leftarrow LineSweepMethod(|\bar{O}|, T_{\bar{O}\times\bar{O}}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$;
22. $\quad\quad \underline{\boldsymbol{q}}(p)|_{(-\infty,p_t)} \leftarrow \langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p), \boldsymbol{1}_O \rangle$;
23. $\quad\quad$ **Return** $\underline{\boldsymbol{q}}$;
24. $\quad$ **End If**
25. $\quad t \leftarrow t + 1$;
26. **End While**
27. $\underline{\boldsymbol{q}}(p)|_{(-\infty,p_t)} \leftarrow \boldsymbol{1}$;

Return $\underline{\boldsymbol{q}}$;

$$\langle \mathbf{0}_{\bar{O}'}, \mathbf{1}_{O'} \rangle \leq \underline{\boldsymbol{q}}(p) \quad \Rightarrow \quad f_p'(\mathbf{0}_{\bar{O}'}) = [f_p(\langle \mathbf{0}_{\bar{O}'}, \mathbf{1}_{O'} \rangle)]_{\bar{O}'} \leq [f_p(\underline{\boldsymbol{q}}(p))]_{\bar{O}'} = [\underline{\boldsymbol{q}}(p)]_{\bar{O}'}$$

$$\Rightarrow \quad \langle f_p'(\mathbf{0}_{\bar{O}'}), \mathbf{1}_{O'} \rangle \leq \underline{\boldsymbol{q}}(p) \quad \Rightarrow \quad f_p'^{(2)}(\mathbf{0}_{\bar{O}'}) = [f_p(\langle f_p'(\mathbf{0}_{\bar{O}'}), \mathbf{1}_{O'} \rangle)]_{\bar{O}'} \leq [f_p(\underline{\boldsymbol{q}}(p))]_{\bar{O}'} = [\underline{\boldsymbol{q}}(p)]_{\bar{O}'}$$

$$\Rightarrow \langle f_p'^{(2)}(\mathbf{0}_{\bar{O}'}), \mathbf{1}_{O'} \rangle \leq \underline{\boldsymbol{q}}(p) \quad \Rightarrow \quad f_p'^{(3)}(\mathbf{0}_{\bar{O}'}) = [f_p\left(\langle f_p'^{(2)}(\mathbf{0}_{\bar{O}'}), \mathbf{1}_{O'} \rangle\right)]_{\bar{O}'} \leq [f_p(\underline{\boldsymbol{q}}(p))]_{\bar{O}'} = [\underline{\boldsymbol{q}}(p)]_{\bar{O}'}$$

…

$$\Rightarrow \langle f_p'^{(\infty)}(\mathbf{0}_{\bar{O}'}), \mathbf{1}_{O'} \rangle \leq \underline{\boldsymbol{q}}(p) \ \ i.e.\ \langle \underline{\boldsymbol{q}}'(p), \mathbf{1}_{O'} \rangle \leq \underline{\boldsymbol{q}}(p)$$

这便完成了证明。 ■

至此，我们通过递归的方法求解出了$p < p_t$时的悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$，也就解决了原问题。我们将我们去除对角优限制后的扫描法总结在算法 2 中，注意这一方法需要递归调用自身。与上一节相同，$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$是一个分段线性函数，并且段数不超过$2n + 1$。为了符号简洁，我们忽略储存函数$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$的方法，并且假定存在一个简单的数据结构，可以完成诸如算法 2 的第 15 和第 22 行的赋值操作。

我们有如下定理。

定理 2-3：对任意矩阵T，假设其满足$T_{ii} = 0, T_{ij} \geq 0$，则算法 2 在多项式时间内，可以求解任意价格$p$对应的悲观均衡$\underline{\boldsymbol{q}}(p)$，并可求出最大收益。

证明：算法 2 中的大部分操作都是矩阵操作，可以在多项式时间内求出。我们需要证明的有两点：一是可以在多项式时间内近似求解特征向量①，二是证明递归过程有复杂性保证。

对于前者事实上找到一种多项式时间，并且精度足够的算法并不容易，并且需要复杂的精度证明。为此，在本章对应的英文版待投论文 [40]中，我们避开了特征向量的求解，感兴趣的读者可以与作者联系。

而对于递归的过程，注意到整个递归的深度不会超过n。因而整个算法的总时间复杂度是多项式级别。 ■

2.7 小结

在这一章里，我们研究了这样一个定价模型：假定买家的心理价位v_i服从$[a_i, b_i]$的平均分布，且已知社交网络中的影响因子T_{ij}。在这一模型下，我们设计出了多项式算法，精确求解了所有贝叶斯纳什均衡中的最小和最大的两个。由于对买家的理性假设，我们认为买家一定会选择诸均衡中的一个作为自己的策略。

① 尽管我们对特征向量近似求解，但我们依然能精确求解均衡向量$\boldsymbol{q}$。这是因为特征向量对我们起到的是辅助作用，回顾(2-14)，只要特征向量的精度保证了我们可以正确地求出k即可。

一个保守的假设是，所有买家都选择了最悲观的均衡$\underline{\boldsymbol{q}}$来设计自己的策略。在这一假设下，我们的多项式算法也可以帮助卖家设计一个合理的定价，使得这一定价获得最高的收益。值得一提的是，这里即便买家可能选择不同的均衡，我们依然可以通过均衡的有序性（命题 2-3b)），推出买家i的购买概率至少为$\underline{q_i}$，因卖家的期望收益依然被保证。

关于这一个问题事实上有诸多的后续工作可以进行，也有一些周边问题值得研究。感兴趣的读者可以参阅本章对应的待投论文 [40]或者与作者取得联系。

第3章 无金钱参与的可信机制

3.1 问题背景

我们从经济学中的一个经典问题入手：政府计划在一个城市中建造几个图书馆来为大众服务。所有的居民需要上报他们的家庭住址，然后政府依据这些信息，决定最合适的图书馆位置。每个居民都希望自己能够到最近的图书馆越近越好，与此同时，政府所希望的是最小化所有居民到最近的图书馆的距离之和，这被称作社会成本(social cost)。在很多情况下，政府并不能相信居民自己汇报的地址，因为人通常是自私的，可能为了个人利益谎报住址。

这类问题被称作选址问题(facility game)。在选址问题里，每个参与者(agent)汇报他们所在的位置，并且由一个机制(mechanism)选择需要建立的设施的位置。在经济学中，机制也被称作社会选择(social choice)。具体来说，假定参与者和需要建立的设施，都存在于某个度量空间内。譬如，这里的度量可以选取欧式距离，或图论中的最短路径距离。所有参与者都会尝试谎报自己的位置来获利，而为了避免这种情况发生，博弈论中引入了可信机制(truthful mechanism)的概念，它保证了任何一个参与者都不能通过单边谎报自己的信息获利。一个更强的定义叫做组群可信机制(group truthful mechanism)，它保证了任何一组参与者都不能通过集体谎报来使得每个人都严格获利。正式的定义将在下一节中给出。

选址问题在社会科学中有着广泛的研究。在度量空间下，有一些文献对可信机制作出了部分刻画：譬如 [7] [30] [5] [38]研究了一维直线情形， [37]研究了普通网络的情形。但是，这些工作没有研究关于对社会成本的优化或近似。

从算法的角度研究机制设计是在 1999 年由 Nisan 和 Ronen 的重要工作 [31] 所发起的。在刚过去的十年里，有相当多的工作从优化的角度分析机制设计 [25] [3] [12] [24]。他们大多数都研究的是有金钱参与的机制。值得一提的是，著名的 Vickrey-Clarke-Groves 机制 [39] [10] [19]就是可信的，因此如果允许金钱参与，我们的选址问题是可以很容易保证最优社会成本的。

而在很多的情形下，货币的传递可能并不合法，或者会带来道德问题，Schummer 和 Vohra [36]就注意到了这一问题，选举就是一个典型的例子。最近，Procaccia 和 Tennenholtz [33]正式地启动了“没有金钱参与的机制设计”这一课题。

这一思想也可以追溯到 Dekel 等人 [11]对激励相容性学习(incentive compatible learning)的研究。

从更算法的角度来看，Procaccia 和 Tennenholtz [33]研究了这样的可信机制，它对任何的输入，所产生的社会成本都不会超过最优社会成本的γ倍，这样的机制被称作γ近似。我们将要研究的是关于近似比γ的上下界。注意，这里的下界是由于机制的可信性造成的，而并不是因为计算复杂性造成的。

对于一维直线情形，倘若有两个设施需要同时选址，Procaccia 和 Tennenholtz [33]证明了$n-2$的上界，以及1.5的下界，这是对确定性的可信机制而言的。后来陆品燕等人 [27]将1.5的下界提高到了 2。此外，陆品燕等人 [27]还研究了随机性的可信机制(randomized truthful mechanism)，并得到$n/2$的上界以及1.045的下界。如何将这里的上下界之间的分歧缩小是一个未决问题，而本章将在渐进的意义下，对这两种情形分别消除分歧。

此外，Alon 等人 [2]还研究了在一般度量空间内的选址。他们几乎给出了有界近似比的可信机制的完整刻画，但是假定了只有一个设施需要选址。在本章中，我们将研究两个设施的选址，并且我们的结果可应用于一般度量空间。注意，这里的推广并不是显然的，但可以看作是 [2]和 [33]这两篇工作的交叉扩展。

3.1.1 主要贡献

对于一般度量空间内的二设施选址问题，我们研究了可信机制的近似比。这是超过一个设施的选址问题，第一次在一般度量空间内被研究。我们得到了三个主要结果。

第一个结果是确定性可信机制的线性下界。值得一提的是，即便在一般度量空间（最弱的模型）下，这也是两个设施的第一次突破常数的下界。这解决了 [33]的猜想。在证明过程中，我们强调两个新定义的概念：半组群可信(partial group truthfulness)，以及像集(image set)。这两个概念是对任意数量的设施，以及一般度量空间均成立的，因此可能对今后的其它推广工作有重要的作用。

我们的第二个结果，是关于随机可信机制的。我们证明了一个常数的近似比上界，可以在度量空间（最强的模型）下成立，而在我们之前最好的上界也只是线性$O(n)$的，并且只能在一维直线情形下工作。这一结果与我们的第一个结果相比，可以看见随机型的确是一个在（没有金钱参与）可信机制设计中的重量级工具。

我们的第三个结果，是一个确定性的可信机制，并且在度量空间为圆时有线性$O(n)$近似比。所谓圆是$S^1 \subset \mathbb{R}^2$，且圆上两点的距离定义为两点之间的劣弧的长度。值得注意的是，这是两个设施选址问题，在除了一维直线以外的度量空间，第一次得到有限上界的例子。同时，我们设计的机制不仅是可信的，还是组群可信的。

我们将我们的结果与当前最优结果列在下表中比较。我们的结果为黑体，前人的结果写在括号中，N/A 表示从未有结果。

表3.1 二设施选址问题 与当前最好结果的比较

	确定性可信机制	**随机性可信机制**
一维直线	上界：（$n-2$ [33]） 下界：$\boldsymbol{(n-1)/2}$（2 [27]）	上界：$\mathbf{4}$（$n/2$ [27]） 下界：（1.045 [27]）
圆	上界：$\boldsymbol{n-1}$（N/A） 下界：$\boldsymbol{(n-1)/2}$（2 [27]）	上界：$\mathbf{4}$（N/A） 下界：（1.045 [27]）
一般度量空间	上界：N/A（N/A） 下界：$\boldsymbol{(n-1)/2}$（2 [27]）	上界：$\mathbf{4}$（N/A） 下界：（1.045 [27]）

3.1.2 相关工作

设施选址问题在社会科学中有广泛研究。假定在离散个可选的位置上选择一个建立设施，并且参与者每人上报自己对可选位置的偏好。著名的 Gibbard-Satterthwaite 定理 [14] [35]告诉我们，如果参与者的偏好可以任意选取，此时唯一的可信机制是独裁法，即无论参与者汇报怎样的偏好，都严格选定一个指定的参与者的位置。

在现实生活中，参与者可能希望的位置并不是任意的。特别地，对于一维直线的设施选址，参与者应当有一个单峰的偏好，而这个峰在参与者自己的位置。[7]研究了这类特殊偏好的问题。在此之后， [30] [5] [38]对一维直线情形下的可信机制做了完整刻画，感兴趣的读者可以参阅 Barberà在 [4]里给出的详细调研。值得一提的是，对于两个或更多设施的特征化（甚至是在一维线性下）一直都是未决难题。

除了社会成本之外，Procaccia 和 Tennenholtz [33]以及 Alon 等人 [2]还研究了另一种优化目标——最大成本，并对可信机制在这一目标下给出了近似比的上下界。此外， [33] [27]还研究了另一种设施选址问题，其中每个参与者控制多个位置，并且希望降低她在所有位置的成本之和。

3.2 预备知识

用(Ω, d)表示度量空间，其中$d: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$是度量。空间中两个点$x, y \in \Omega$的距离是$d(x, y)$。回忆对所有的$x \in \Omega$，我们有$d(x, x) = 0$。

设$N = [n] = \{1,2, \dots n\}$为所有的参与者，且第$i$个参与者上报的地址为$x_i \in \Omega$。我们用$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$表示一个**地址配置（location profile）**。

在k设施选址问题中，一个**确定性机制（deterministic mechanism）**将给定地址配置$\boldsymbol{x}$，输出k个设施分别的位置，因此是一个函数$f: \Omega^n \to \Omega^k$。假定设施被分配的地址为$f(\boldsymbol{x}) = \{l_1, l_2, \dots l_k\}$，定义第$i$个参与者的成本，是她与最近设施的距离：

$$\mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}), x_i) = \min_{j=1,\dots,k}\{d(l_j, x_i)\}$$

一个**随机性机制（randomized mechanism）**是一个函数$f: \Omega^n \to \Delta(\Omega^k)$，这里$\Delta(\Omega^k)$是在空间$\Omega^k$上的分布。此时第$i$个参与者的成本定义为她与最近设施的期望距离：

$$\mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}), x_i) = \mathbb{E}_{l\sim f(x)}\left[\min_{j=1,\dots,k}\{d(l_j, x_i)\}\right]$$

我们用$\boldsymbol{x}_{-i} = (x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$表示除了$i$以外的地址配置，并定义$\boldsymbol{x} = \langle x_i, \boldsymbol{x}_{-i}\rangle$。类似地，当$S \subset N$是一组参与者时，我们用$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}\rangle$表示这样的配置，其中$S$中的参与者遵循地址$\boldsymbol{x}_S$，其他参与者遵循$\boldsymbol{x}_{-S}$。为了简便起见，我们做如下简化表示：$f(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \coloneqq f(\langle x_i, \boldsymbol{x}_{-i}\rangle)$，$f(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}) \coloneqq f(\langle \boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}\rangle)$。

此时关于机制f的社会成本定义为所有n个参与者的成本之和：

$$SC(f, \boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}), x_i)$$

注意在随机的情形下，这个社会成本是一个期望值。对于地址配置$\boldsymbol{x}$，我们用$\mathrm{OPT}(\boldsymbol{x})$表示最优的社会成本。我们称一个机制$f$有近似比$\gamma$，如果对所有的地址配置$\boldsymbol{x} \in \Omega^n$，

$$SC(f, \boldsymbol{x}) \le \gamma \mathrm{OPT}(\boldsymbol{x})$$

这一章将着重研究$k = 2$的情形，并称之为二设施选址问题。除了一般的度量空间以外，我们还研究两个特例：一维直线以及圆。前者就是实轴上的欧几里得度量空间；而后者是$S^1 \in \mathbb{R}^2$并且定义度量为两点间劣弧的长度。我们关于直线和圆的特例的定义，与 [2]中所述一致。

现在，我们对可信机制，和组群可信机制做出正式定义：

定义 3-1：一个机制是**可信（truthful）**的，如果任意一个参与者都不能通过谎报她的位置，来获得利益。严格来说，给定参与者i，位置配置$\boldsymbol{x} = \langle x_i, \boldsymbol{x}_{-i}\rangle \in \Omega^n$，

以及任何谎报的位置$x_i' \in \Omega$，都有：

$$\mathrm{cost}(f(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}), x_i) \le \mathrm{cost}(f(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}), x_i)$$

定义 3-2：一个机制是**组群可信(group truthful)**的[①]，如果任意一组参与者同时谎报他们的位置，都有至少一个人不能获利。严格来说，给定非空集合$S \subset N$，位置配置$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S} \rangle \in \Omega^n$，以及任何谎报的位置$\boldsymbol{x}_S' \in \Omega^{|S|}$，都存在$i \in S$满足：

$$\mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}), x_i) \le \mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}_S', \boldsymbol{x}_{-S}), x_i)$$

3.2.1 半组群可信（Partial Group Truthfulness）

受到组群可信定义的启发，我们定义如下的半组群可信：

定义 3-3：一个机制是**半组群可信(partial group truthful)**的，如果任意一组<u>在同一个位置</u>的参与者，同时谎报他们的位置，每个人都不能获利。严格来说，给定非空集合$S \subset N$，位置配置$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S} \rangle \in \Omega^n$，其中$\boldsymbol{x}_S = (x, \dots, x)$，以及任何谎报的位置$\boldsymbol{x}_S' \in \Omega^{|S|}$，我们有：

$$\mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}), x) \le \mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}_S', \boldsymbol{x}_{-S}), x)$$

从直觉上来看，定义 3-3 说的是倘若一组参与者在同一个位置，那么他们不能同时谎报并且获利。从定义我们可以看出：

$$\text{组群可信} \Rightarrow \text{半组群可信} \Rightarrow \text{可信}$$

在接下来的引理中，我们将看到其中的一个反方向也是成立的：

引理 3-1：在k设施选址问题中，一个可信的机制，也是半组群可信的。

证明：我们使用与定义 3-3 相同的记号。此外，设$S = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$，则$x_{s_i}'$是$\boldsymbol{x}_S'$中参与者$s_i$所谎报的位置。考虑如下的配置序列：

$$P_i (0 \le i \le l): \begin{cases} s_j\text{上报}x & 1 \le j \le i \\ s_j\text{上报}x_{s_i}' & i < j \le l \\ \text{其他人上报}\boldsymbol{x}_{-S} & \end{cases}$$

根据定义，

$$\mathrm{cost}(f(P_0), x) = \mathrm{cost}(f((x, \dots, x), \boldsymbol{x}_{-S}), x)$$

以及

$$\mathrm{cost}(f(P_l), x) = \mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}_S', \boldsymbol{x}_{-S}), x)$$

我们接下来将证明$\mathrm{cost}(f(P_0), x) \le \mathrm{cost}(f(P_l), x)$。

---

① 这里遵循 [2] [33]我们采用了组群可信的弱定义。而有一些其他工作使用了强定义：不可能存在一个集合，使得他们通过谎报，所有人的成本不增，并且至少有一个人严格下降。

当$1 \leq i \leq l$时，在配置P_i中参与者s_i处在位置x。此时我们考虑参与者s_i谎报到x'_{s_i}的情形，这就是P_{i-1}。根据可信机制的定义，参与者s_i不能通过这次谎报获利，也就是$\mathrm{cost}(f(P_i), x) \leq \mathrm{cost}(f(P_{i-1}), x)$。对所有这样的$i$求和即得所要的结论。■

我们在此做一个预告，下一节中我们将要证明的下界，需要多次借助这里的半组群可信的性质。值得一提的是，半组群可信的性质并没有根据二设施来定义，也就是对于k设施依然成立，这可能对今后的更进一步研究提供方便。

3.3 确定性机制的线性下界

在这一节，我们将给出确定性可信机制的近似比下界$\frac{n-1}{2}$。这个下界是在一维直线中得到的，因此可以直接扩展到一般度量空间。前人得到的最好结果只是常数 [33] [27]。

对于在直线上的二设施选址问题，选择最左和最右的两个上报的位置放置设施，是一个确定性的可信机制，但是只能保证$n-2$倍的近似比 [33]。因此，我们的下界在渐进意义上，与这个上界是吻合的。

3.3.1 像集（Image Set）

我们先研究一些关于k设施选址问题的性质，这些性质将被用来证明二设施选址，但或许会对将来的更深入研究有作用。

我们定义**像集（image set）**的概念。给定确定性机制f，定义参与者i关于位置配置$\boldsymbol{x}_{-i}$的像集，为当x_i在全空间内变化时，所有的设施可能放置位置的并：

$$\mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i}) = \bigcup_{x_i \in \Omega} f(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})$$

接下来的引理指出了，对于一个可信机制f，它势必会选择$\mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})$中离$i$最近的位置，放置设施。直观而言，像集代表了一个参与者i的能力。如果f输出了i的能力范围内最佳的一个设施，那么i就没有理由谎报了。

引理 3-2：设f是一个k设施选址问题的可信机制，并且$\langle x_i, \boldsymbol{x}_{-i} \rangle \in \Omega^n$。我们有：

$$\mathrm{cost}(f(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}), x_i) = \inf_{y \in \mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})} d(y, x_i)$$

证明：我们反设存在某个$y^* \in \mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})$满足$d(y^*, x_i) < \mathrm{cost}(f(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}), x_i)$。

由像集的定义，存在x_i^*满足$y^* \in f(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i})$。考虑参与者$i$在位置$x_i$的情形。她可以谎报自己的位置在$x_i^*$，获得比她现有成本$\operatorname{cost}(f(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}), x_i)$更低的成本$d(y^*, x_i)$。这与$f$是可信机制矛盾。 ■

这个引理还暗示了，如果某个参与者谎报，称自己的位置在一个已经被分配了设施的位置上，那么在新分配的设施中，也一定有一个设施被放置在这个位置。严格来说我们给出：

推论 3-1：f是一个k设施选址问题的可信机制，并且$\boldsymbol{x} = \langle x_i, \boldsymbol{x}_{-i} \rangle \in \Omega^n$。如果$z \in f(\boldsymbol{x})$，那么也应该有$z \in f(z, \boldsymbol{x}_{-i})$。

证明：根据像集的定义，$z \in f(\boldsymbol{x}) = f(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})$，所以$z \in \mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})$。根据引理 3-2，$\operatorname{cost}(f(z, \boldsymbol{x}_{-i}), z) = \inf_{y \in \mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})} d(y, z)$，但是等式的右边是 0（因为$z \in \mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})$）。综上，必有$z \in f(z, \boldsymbol{x}_{-i})$。 ■

接下来我们不加证明地给出引理 3-2 的另一个直接推论：

推论 3-2：设$\mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})$是一个$k$设施选址问题可信机制的像集，且度量空间为$(\Omega, d)$，那么$\mathrm{I}_i(\boldsymbol{x}_{-i})$是$\Omega$中的闭集（这里的拓扑为度量$d(\cdot)$所诱导的自然拓扑）

现在我们将像集的概念扩展到多个参与者。给定机制f，我们定义一组参与者S的像集为一个关于$\boldsymbol{x}_{-S}$的函数：

$$\mathrm{J}_S(\boldsymbol{x}_{-S}) = \bigcup_{x_S \in \Omega^{|S|}} f(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S})$$

使用半组群可信的性质，引理 3-2、推论 3-1 以及推论 3-2 分别有如下的对应副本。

引理 3-3（继承引理 3-2）：设f是一个k设施选址问题的可信机制。给定一组参与者$\mathrm{S} \subset N$，假定$\boldsymbol{x}_S = (x, \ldots, x)$，并且$\boldsymbol{x}_{-S} \in \Omega^{n-|S|}$。我们有：

$$\operatorname{cost}(f(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}), x) = \inf_{y \in \mathrm{J}_S(\boldsymbol{x}_{-S})} d(y, x)$$

证明：我们反设存在某个$y^* \in \mathrm{J}_S(\boldsymbol{x}_{-S})$满足$d(y^*, x) < \operatorname{cost}(f(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}), x)$。

由像集的定义，存在$\boldsymbol{x}'_S$满足$y^* \in f(\boldsymbol{x}'_S, \boldsymbol{x}_{-S})$。根据半组群可信的性质（回忆引理 3-1），$S$中的参与者不能集体谎报到$\boldsymbol{x}'_S$并且获利，因此：

$$\operatorname{cost}(f(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_{-S}), x) \le \operatorname{cost}(f(\boldsymbol{x}'_S, \boldsymbol{x}_{-S}), x) \le d(y^*, x_i)$$

导致了矛盾。 ■

类似地，我们有如下两个推论：

推论 3-3（继承推论 3-1）：f是一个k设施选址问题的可信机制。给定一组参与者$S \subset N$，并且$\boldsymbol{x}_{-S} \in \Omega^{n-|S|}$。我们有：

$$\forall x \in \mathrm{J}_S(\boldsymbol{x}_{-S}), \qquad x \in f\big((x, \ldots, x), \boldsymbol{x}_{-S}\big)$$

推论 3-4（继承推论 3-2）：$\mathrm{J}_S(\boldsymbol{x}_{-S})$是$\Omega$中的闭集。

3.3.2 下界的证明

在这一节中，我们给出关于下界的主定理，并给出证明。

定理 3-1：对于在一维直线上的二设施选址问题，任何确定性的可信机制的近似比，都将至少为$\frac{n-1}{2}$。

我们关于下界的证明，将不断研究如下的一类位置配置：

$$\boldsymbol{x}(a,b) \coloneqq (\underbrace{a,a,\dots,a}_{(n-1)/2},\underbrace{b,b,\dots,b}_{(n-1)/2},1)$$

其中$a \le b \le 1$是两个参数。直觉上可以看到，当$a=-1, b=0$时，一个有较好近似比的机制，必须将其中一个设施放在a附近，另一个设施放在b附近；当a和b之间的距离非常小的时候，这个机制又必须将一个设施放在a,b附近，另一个放在1附近。但是，我们将看到，一个可信的机制不能同时满足这两种情形。

注意到，在$\boldsymbol{x}(a,b)$中，$\frac{n-1}{2}$个参与者同时处在a，另外$\frac{n-1}{2}$个参与者同时处在b，这一配置将为我们使用“半组群可信”提供了方便。

假定S_a（或S_b）表示处在位置a（或b）的那些参与者的集合。那么$\boldsymbol{x}_{-S_a}$（或$\boldsymbol{x}_{-S_b}$）就是在S_b（或S_a）中的参与者上报b（或a），并且最后一个参与者上报1。我们定义：

$$\mathrm{I}_a(b) = \mathrm{J}_{S_a}(\boldsymbol{x}_{-S_a}) = \mathrm{J}_{S_a}((b,\dots,b,1))$$
$$\mathrm{I}_b(a) = \mathrm{J}_{S_b}(\boldsymbol{x}_{-S_b}) = \mathrm{J}_{S_b}((a,\dots,a,1))$$

引理 3-4：考虑一维直线的二设施选址问题。假设f是一个保证了近似比小于$\frac{n-1}{2}$的可信机制，那么对任何$a \le b \le 1$，必有$a \in f(\boldsymbol{x}(a,b))$。

证明：当$b=1$的时候结论显然。现在考察$b<1$时候的$\mathrm{I}_a(b)$。我们首先证明，$\mathrm{I}_a(b) \cap (-\infty,b) = (-\infty,b)$，通过反设的方法：反设存在$c<b$满足$c \notin \mathrm{I}_a(b)$

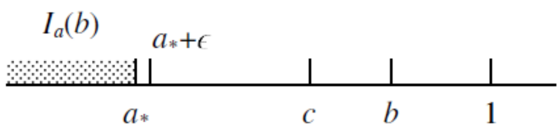

图3.1　关于c, a_*以及$a_*+\epsilon$的定义

注意，当$a \to -\infty$的时候，任何有有界近似比的机制，都必须在a附近放置一个设施，当然这个设施在c的左侧。这说明$\mathrm{I}_a(b) \cap (-\infty,b) \ne \emptyset$，我们可以定义$a_* = \sup_{x \in \mathrm{I}_a(b)}\{x<c\}$。因为$\mathrm{I}_a(b)$是一个闭集（回忆推论 3-4），我们有$a_* \in \mathrm{I}_a(b)$。

因此，如图 3.1 所示，我们有$a_* < c < b$。根据上述定义，我们还有$(a_*,c] \cap \mathrm{I}_a(b) = \emptyset$。选取任意的$0 \le \epsilon < (c-a_*)/2$，在像集$\mathrm{I}_a(b)$中，与$a_*+\epsilon$最

近的，一定是a_*（这个点是唯一的）。因此根据引理 3-3，$a_* \in f\big(\boldsymbol{x}(a_*+\epsilon, b)\big)$。我们固定$\epsilon = \frac{c-a_*}{3} \le \frac{b-a_*}{3}$，并且考虑如下配置：

$$\boldsymbol{x}' = (\underbrace{a_*+\epsilon, a_*+\epsilon, \dots, a_*+\epsilon}_{(n-1)/2}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{(n-1)/2}, a_*)$$

根据事实$a_* \in f(\boldsymbol{x}(a_*+\epsilon, b))$，以及推论 3-2，我们知道$a_* \in f(\boldsymbol{x}')$。可是，无论$f$如何放置第二个设施，总的社会成本至少为$\frac{(n-1)\epsilon}{2}$。这与$f$有小于$\frac{n-1}{2}$近似比的性质矛盾，因为关于$\boldsymbol{x}'$的最优的社会成本仅为$\epsilon$。综上，我们有$\mathrm{I}_a(b) \cap (-\infty, b) = (-\infty, b)$。

最后，通过推论 3-3，可以看到对于任意的$a < b$，必有$a \in f(\boldsymbol{x}(a, b))$。而对于$a = b$的情形，结论是显然的。 ■

使用类似的技术，我们还能证明下面这个引理：

引理 3–5：考虑一维直线的二设施选址问题。假设f是一个保证了近似比小于$\frac{n-1}{2}$的可信机制，那么对任何$a \le b \le 1$，必有$b \in f(\boldsymbol{x}(a, b))$。

证明：引理当$a = 1$时是显然的。现在考察$a < 1$时的$\mathrm{I}_b(a)$。我们先证明$\mathrm{I}_b(a) \cap (a, 1) \neq \emptyset$。

如果$\mathrm{I}_b(a) \cap (a, 1) = \emptyset$，考虑配置$\boldsymbol{x}\left(a, \frac{a+1}{2}\right)$。处在位置$\frac{a+1}{2}$处的参与者，他们的成本至少是$\frac{1-a}{2}$，因为$\mathrm{I}_b(a) \cap (a, 1) = \emptyset$。因此，总的社会成本至少是$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{1-a}{2}$，而最优社会成本仅仅是$\frac{1-a}{2}$，这与我们“$f$是小于$\frac{n-1}{2}$近似机制”的假设矛盾。因此，一定可以取出某个$c_0 \in \mathrm{I}_b(a) \cap (a, 1)$。

接下来我们要证明$\mathrm{I}_b(a) \cap (a, 1) = (a, 1)$。反设存在$c \in (a, 1)$满足$c \notin \mathrm{I}_b(a)$，显然地，$c \neq c_0$。

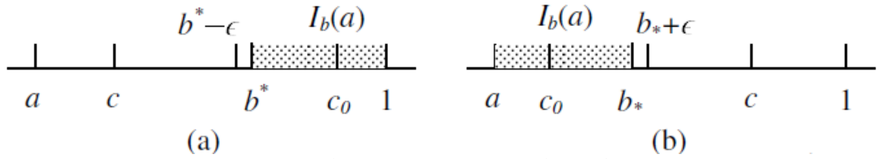

图3.2　关于c_0, c, b_*以及b^*的定义

如果$c < c_0$（图 3.2(a)），我们定义$b^* = \inf_{x \in \mathrm{I}_b(a)}\{x > c\}$。因为$\mathrm{I}_b(a)$是闭集（推论 3-4），我们有$b^* \in \mathrm{I}_b(a)$以及$a < c < b^* \le c_0 < 1$。

根据上述定义，我们知道$[c, b^*) \cap \mathrm{I}_b(a) = \emptyset$。对任意的$0 \le \epsilon < (b^*-c)/2$，可以看到在像集$\mathrm{I}_b(a)$中，离$b^*-\epsilon$最近的点是$b^*$（这个点唯一）。因此，根据引理 3-3，$b^* \in f(\boldsymbol{x}(b^*-\epsilon, b))$。现在我们固定$\epsilon = \frac{b^*-c}{3} < \frac{b^*-a}{3}$，并且考虑如下配置：

$$\boldsymbol{x}' = (\underbrace{a, a, \dots, a}_{(n-1)/2}, \underbrace{b^*-\epsilon, b^*-\epsilon, \dots, b^*-\epsilon}_{(n-1)/2}, b^*)$$

根据$b^* \in f(\boldsymbol{x}(b^* - \epsilon, b))$的事实，以及推论 3-1，必有$b^* \in f(\boldsymbol{x}')$。可是，无论$f$如何放置第二个设施，总的社会成本都至少是$\frac{(n-1)\epsilon}{2}$，与$f$具有小于$\frac{n-1}{2}$的近似比矛盾，因为$\boldsymbol{x}'$的最优社会成本仅为$\epsilon$。

如果$c > c_0$（图 3.2(b)），我们定义$b_* = \sup_{x \in \mathrm{I}_b(a)}\{x < c\}$。由于$\mathrm{I}_b(a)$是闭集，我们知道$b_* \in \mathrm{I}_b(a)$，并且$a < c_0 \le b_* \le c < 1$。

根据上述定义，我们知道$(b_*, c] \cap \mathrm{I}_b(a) = \emptyset$。对任意的$0 \le \epsilon < (c - b_*)/2$，在像集$\mathrm{I}_b(a)$中，离$b_* + \epsilon$最近的点是$b_*$（这个点唯一）。因此，根据引理 3-3，$b_* \in f(\boldsymbol{x}(b_* + \epsilon, b))$。现在我们固定$\epsilon = \min\left\{\frac{c-b_*}{3}, \frac{b_*-a}{3}\right\}$，并且考虑如下配置：

$$\boldsymbol{x}'' = (\underbrace{a, a, \dots, a}_{(n-1)/2}, \underbrace{b_* + \epsilon, b_* + \epsilon, \dots, b_* + \epsilon}_{(n-1)/2}, b_*)$$

根据$b_* \in f(\boldsymbol{x}(b_* + \epsilon, b))$的事实，以及推论 3-1，必有$b_* \in f(\boldsymbol{x}'')$。可是，无论$f$如何放置第二个设施，总的社会成本都至少是$\frac{(n-1)\epsilon}{2}$，与$f$具有小于$\frac{n-1}{2}$的近似比矛盾，因为$\boldsymbol{x}''$的最优社会成本仅为$\epsilon$。

综上所述，我们证明了$\mathrm{I}_b(a) \cap (a, 1) = (a, 1)$。再根据推论 3-3，可以推出对所有的$a \le b \le 1$，都有$b \in f(\boldsymbol{x}(a, b))$。注意到这一结论对于$b = a$或者$b = 1$，也是显然成立的。 ■

现在，我们给出主定理的证明。

定理 3-1 的证明：我们考虑如下配置

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\underbrace{0,0, \dots, 0}_{(n-1)/2}, \underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^2}}_{(n-1)/2}, 1)$$

根据引理 3-4 和引理 3-5，任何可信机制f，如果它保证了小于$\frac{n-1}{2}$的近似比，那么对于上述配置，f必然要在$\frac{1}{n^2}$和0分别放置一个设施，总社会成本为1。然而，最优的社会成本其实只有$\frac{1}{2n}$，只需要将两个设施分别放在0和1两处。这与f保证了一个小于$\frac{n-1}{2}$的近似比矛盾。 ■

3.3.3 讨论

我们的下界是在一维直线的情形下构造的，当然它可以被直接拓展到一般的度量空间。而对于一些特殊的度量空间，如圆，他们可以在局部被看作直线，因此也具有这一下界。在直线的情形下，我们已经有一个$n-2$的上界机制，与我们的下界在渐进意义下是吻合的。但是，这一下界对于更一般的度量空间不一定是紧的。譬如，除了直线和圆（见第 3.5 章），没有过确定性可信机制的上界。一种很可能发生的情形是，对于一般度量空间的可信机制的近似比，或许是无界的。

显而易见的是，我们分析线性下界的技巧可以推广到k个设施选址的机制设计（$k>2$）。但是，在这种情形下，即便是一维直线，我们都不知道这个下界是否是紧的。特别地，一个重要的未决问题是：

对于一维直线上的三设施选址问题，是否存在可信机制，可以保证任何有界的近似比。

3.4 比例分配机制（Proportional Mechanism）

在前一节中，我们证明了任何确定性的可信机制都不能保证一个好的（亚线性）的近似比。在这一节里，我们将给出二设施选址问题的，首个具有常数近似比的随机性机制。而在此之前，现有的最优的随机性机制只能保证$n/2$倍的近似比，且只能在一维直线下成立。我们的机制可以在任意度量空间内成立。

比例分配机制：

给定地址配置$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，两个设施的地址通过以下的随机过程得到：

第一轮：从N中随机选取一个参与者i，每个参与者有$1/n$的概率被选中，并将第一个设施放置在$l_1=x_i$处；

第二轮：定义$d_j=d(l_1,x_j)$为参与者j与第一个设施的距离。我们以$\frac{d_j}{\sum_{k\in N}d_k}$的概率选取参与者$j$，并将第二个设施放置在$l_2=x_j$处。[①]

这里提出的比例分配机制，一定会将设施放置在某个上报的位置，并且放置第二个设施的概率，与每个参与者到第一个设施的距离成正比。这就是为什么我们称之为“比例分配”机制。

这一机制有如下的重要性质。当地一个设施固定时，每个参与者的期望成本可以写成$\frac{X}{Y}Z$的形式，这里X,Y,Z是距离，$\frac{X}{Y}$是表示概率的系数，而Z是成本。但是，我们也可以将其理解为$\frac{Z}{Y}X$，其中$\frac{Z}{Y}$表示系数，X是成本。这一个小技巧将在我们本节的证明汇总反复出现。

3.4.1 可信性

定理 3-2：二设施选址问题的比例分配机制是可信的。

证明：我们用$\mathrm{cost}_k(f(\boldsymbol{x}),x_i)$表示假定第一个设施放置在$x_k$后，参与者$i$的期望成本。显然有$\mathrm{cost}_i(f(\boldsymbol{x}),x_i)=0$。对于$i$的总社会成本为：

① 如果所有参与者汇报相同的位置，那么我们的机制将第二个设施也放在l_1处。

$$\text{cost}(f(\boldsymbol{x}), x_i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i) = \frac{1}{n}\sum_{k\neq i} \text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)$$

考虑配置$\boldsymbol{x}' = \langle x_i', \boldsymbol{x}_{-i}\rangle$，其中参与者$i$谎报自己的位置从$x_i$到$x_i'$。为了证明可信性，我们只需要证明对于所有的$k \neq i$，

$$\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}'), x_i) \geq \text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)$$

以下我们固定第一个设施在x_k处。回忆定义$d_i = d(l_1, x_i) = d(x_k, x_i)$，那么$\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)$可以写成

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j \min\{d_i, d(x_i, x_j)\}}{\sum_{j=1}^{n} d_j} = \frac{\sum_{j\neq i} d_j \min\{d_i, d(x_i, x_j)\}}{\sum_{j=1}^{n} d_j}$$

设$d_i' = d(l_1, x_i')$，当第i个参与者谎报后，她的成本为

$$\frac{\sum_{j\neq i} d_j \min\{d_i, d(x_i, x_j)\}}{\sum_{j=1}^{n} d_j + (d_i' - d_i)} + \frac{d_i' \min\{d_i, d(x_i, x_i')\}}{\sum_{j=1}^{n} d_j + (d_i' - d_i)}$$

将以上两个表达式比较之后我们有如下关系：

$$\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}'), x_i) = \frac{\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)\sum_{j=1}^{n} d_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j + (d_i' - d_i)} + \frac{d_i' \min\{d_i, d(x_i, x_i')\}}{\sum_{j=1}^{n} d_j + (d_i' - d_i)}$$

如果$d_i' \leq d_i$，右边的第一项已经大于了$\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)$，而第二项非负。因此我们只需要考虑$d_i' > d_i$的情形。我们有

$$\begin{aligned}&\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}'), x_i) - \text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)\\ &= \frac{-(d_i' - d_i)\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)}{\sum_{j=1}^{n} d_j + (d_i' - d_i)} + \frac{d_i' \min\{d_i, d(x_i, x_i')\}}{\sum_{j=1}^{n} d_j + (d_i' - d_i)}\end{aligned}$$

因此只要证明下式即可：

$$d_i' \min\{d_i, d(x_i, x_i')\} - (d_i' - d_i)\text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i) \geq 0 \tag{3-1}$$

我们将通过两种子情况证明上式。

- 如果$\min\{d_i, d(x_i, x_i')\} = d_i$，不等式(3-1)成立因为$d_i' \geq d_i' - d_i$并且$d_i \geq \text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)$。其中后者是因为参与者$i$至少可以选择在$x_k$处的第一个设施，而这个设施与她的距离是$d(x_i, x_k) = d_i$。
- 如果$\min\{d_i, d(x_i, x_i')\} = d(x_i, x_i')$，不等式(3-1)也成立，因为$d_i' \geq d_i \geq \text{cost}_k(f(\boldsymbol{x}), x_i)$，以及$d(x_i, x_i') \geq d_i' - d_i$。这里后者是由于度量空间$(\Omega, d)$中的三角不等式，并且有$d_i' = d(l_1, x_i')$以及$d_i = d(l_1, x_i)$。

至此，我们完成了证明。 ■

从以上的证明可以看到，我们的比例分配机制不仅是可信的，在一个稍强一些的定义下也是可信的：如果一个参与者可以看到机制第一回合（即选定x_k）的随机信息，她依然不能通过谎报获益。

3.4.2 对社会成本的近似比

在这一节中，我们在一般度量空间下，分析我们的比例分配机制，对于总社会成本的近似比。我们将证明下面这个定理：

定理 3-3：二设施选址问题下，对任意度量空间，比例分配机制是 4 近似的。

给定位置配置$\boldsymbol{x}$，设f_α和f_β是在最优解中两个设施的位置。取$\alpha \subset N$为最优解中严格离f_α较近的参与者构成的集合，$\beta = N \backslash \alpha$。我们用$\mathrm{OPT}_\alpha$表示$\alpha$中所有参与者的成本之和，$\mathrm{OPT}_\beta$表示$\beta$中所有参与者的成本之和。当然，最优解$\mathrm{OPT} = \mathrm{OPT}_\alpha + \mathrm{OPT}_\beta$。

类似地，我们定义cost_α（或cost_β）为我们的比例分配机制下，所有α（或β）中的参与者的成本之和。设F_α（或F_β）表示我们的机制第一轮选取的参与者k，在α（或β）中这个随机事件。我们需要对总的期望社会成本做出限制，也就是计算$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta]$。由于$F_\alpha$和$F_\beta$是两个互斥事件，他们构成了全概率空间的一个划分，因此：

$$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta] = \Pr[F_\alpha] \cdot \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta | F_\alpha] + \Pr[F_\beta] \cdot \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta | F_\beta]$$

接下来的两个引理，将帮助我们对$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta | F_\alpha] = \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha | F_\alpha] + \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\beta | F_\alpha]$进行限制。类似的结论也可以对$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta | F_\beta]$得出。

引理 3-6：$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha | F_\alpha] \le 2\mathrm{OPT}_\alpha$。

证明：我们有$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha | F_\alpha] \le \frac{1}{|\alpha|} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} d(x_i, x_j)$，因为我们可以完全忽略第二个设施的存在。根据$\mathrm{OPT}_\alpha = \sum_{i \in \alpha} d(x_i, f_\alpha)$，以及三角不等式，我们可以得到：

$$\begin{aligned} |\alpha| \cdot \mathrm{OPT}_\alpha &= \sum_{i \in \alpha} |\alpha| \cdot d(x_i, f_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} (d(x_i, f_\alpha) + d(x_j, f_\alpha)) \\ &\ge \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} d(x_i, x_j) \end{aligned}$$

由此引理成立。 ■

引理 3-7：$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\beta | F_\alpha] \le 2\mathrm{OPT}_\alpha + 4\mathrm{OPT}_\beta$。

证明：定义

$$\mathrm{cost}_\beta^{k,i} \coloneqq \sum_{j \in \beta} \min\{d(x_k, x_j), d(x_i, x_j)\}$$

为我们的比例分配机制中，第一轮选取了参与者k，第二轮选取了参与者i后，β中所有参与者的成本之和。用$P(i|k)$表示当第一轮选取了参与者k的条件下，第二轮选取参与者i的概率。我们有：

$$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\beta|F_\alpha] = \sum_{k\in\alpha}\frac{1}{|\alpha|}\sum_{i\in\alpha}\mathrm{cost}_\beta^{k,i}\cdot P(i|k) + \sum_{k\in\alpha}\frac{1}{|\alpha|}\sum_{i\in\beta}\mathrm{cost}_\beta^{k,i}\cdot P(i|k) \tag{3-2}$$

对于(3-2)式中的第一项，我们忽略第二个设施，并且用β中所有参与者到第一个设施$l_1(=x_k)$的距离来限制：

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\alpha}\frac{1}{|\alpha|}\sum_{i\in\alpha}\mathrm{cost}_\beta^{k,i}\cdot P(i|k) &\le \sum_{i\in\alpha}\frac{1}{|\alpha|}\sum_{k\in\alpha}\left(\sum_{j\in\beta}d(x_k,x_j)\right)\cdot\frac{d(x_k,x_i)}{\sum_{j\in N}d(x_k,x_j)} \\ &\le \sum_{i\in\alpha}\frac{1}{|\alpha|}\sum_{k\in\alpha}d(x_k,x_i) \le 2\mathrm{OPT}_\alpha\end{aligned} \tag{3-3}$$

其中最后一个不等号是由于引理 3-6。

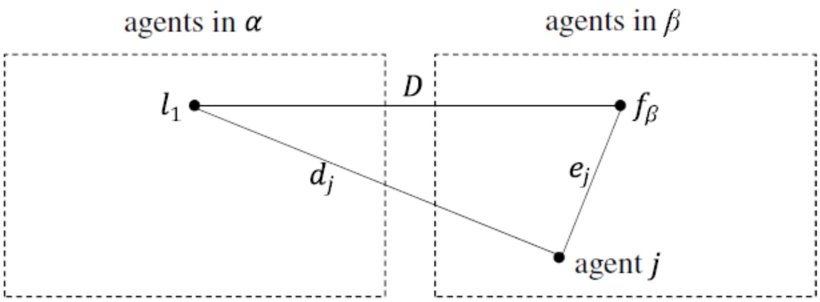

图3.3　关于D, d_i和e_i的定义

对于(3-2)式中的第二项，我们将对固定的$k\in\alpha$，将求和号里面的部分做出限制。也就是说我们固定$l_1(=x_k)$，并用$d_j = d(l_1,x_j)$简化表达。如图 3.3，我们定义$D = d(l_1,f_\beta)$为第一个设施l_1与最优设施f_β的距离。此外，对于β中的参与者j，我们还定义$e_j = d(f_\beta,x_j)$为参与者j到β中的最优设施的距离，并且为了简化表达，定义$s_j = d_j - e_j$。容易看出，$\mathrm{OPT}_\beta = \sum_{j\in\beta}e_j$ 。

注意到在我们的定义中，s_j可能为负值。但是，我们一定有$\sum_{j\in\beta}s_j \ge 0$，因为若不然，$l_1$就是一个对于$\beta$中的参与者来说，严格比$f_\beta$更好的设施，与$f_\beta$的最优性矛盾。

现在我们计算β 中所有参与者的总成本：

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\beta}\mathrm{cost}_\beta^{k,i}\cdot P(i|k) &= \sum_{i\in\beta}\left(\sum_{j\in\beta}\min\{d_j,d(x_i,x_j)\}\right)\frac{d_i}{\sum_{j\in N}d_j} \\ &= \sum_{i\in\beta}\frac{e_i+s_i}{\sum_{j\in N}e_j+s_j}\left(\sum_{j\in\beta}\min\{e_j+s_j,d(x_i,x_j)\}\right)\end{aligned} \tag{3-4}$$

根据三角不等式，我们有$d(x_i, x_j) \le e_j + e_i$，继续上述计算：

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\beta} \mathrm{cost}_\beta^{k,i} \cdot P(i|k) &\le \sum_{i\in\beta} \frac{e_i + s_i}{\sum_{j\in N} e_j + s_j} \sum_{j\in\beta} \min\{e_j + s_j, e_j + e_i\} \\ &= \sum_{i\in\beta} \frac{e_i + s_i}{\sum_{j\in N} e_j + s_j} \sum_{j\in\beta} e_j \\ &\quad + \sum_{i\in\beta} \frac{e_i}{\sum_{j\in N} e_j + s_j} \sum_{j\in\beta} \min\{s_j, e_i\} \\ &\quad + \sum_{i\in\beta} \frac{s_i}{\sum_{j\in N} e_j + s_j} \sum_{j\in\beta} \min\{s_j, e_i\}\end{aligned} \tag{3-5}$$

最后求和的三项中的第一项严格等于$\sum_{j\in\beta} e_j = \mathrm{OPT}_\beta$。对于求和的第二项，我们将$\min\{s_j, e_i\}$缩放成$s_j$，再由于$\sum_{j\in\beta} e_j + s_j \ge \sum_{j\in\beta} s_j$，第二项不超过$\sum_{j\in\beta} e_j = \mathrm{OPT}_\beta$。

现在考察第三项，我们这一次将$\min\{s_j, e_i\}$缩放成e_j。根据三角不等式，我们有$e_j + D \ge d_j \Rightarrow s_j \le D$，以及$d_j + e_j \ge D$。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\beta} \frac{s_i}{\sum_{j\in N} e_j + s_j} \sum_{j\in\beta} \min\{s_j, e_i\} &\le \sum_{i\in\beta} \frac{s_i |\beta| e_i}{\sum_{j\in N} e_j + s_j} \\ &\le \sum_{i\in\beta} e_i \frac{|\beta| \cdot D}{\sum_{j\in N} e_j + s_j} \le 2\mathrm{OPT}_\beta\end{aligned} \tag{3-6}$$

这里最后一个不等式是由于（回忆$\sum_{j\in\beta} s_j \ge 0$）

$$\sum_{j\in\beta} 2e_j + 2s_j \ge \sum_{j\in\beta} 2e_j + s_j = \sum_{j\in\beta} d_j + e_j \ge |\beta| \cdot D$$

最后，将三项合并在一起，可以得出

$$\sum_{i\in\beta} \mathrm{cost}_\beta^{k,i} \cdot P(i|k) \le 4\mathrm{OPT}_\beta \tag{3-7}$$

将(3-3)和(3-7)带入(3-2)，我们得到$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\beta | F_\alpha] \le 2\mathrm{OPT}_\alpha + 4\mathrm{OPT}_\beta$。■

现在，我们已经准备好了证明这一节的主定理：

定理 3-3 的证明：我们用以下的不等式链来分析

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta] &\le \max\{\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta | F_\alpha], \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha + \mathrm{cost}_\beta | F_\beta]\} \\ &= \max\{\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha | F_\alpha] + \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\beta | F_\alpha], \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha | F_\beta] + \mathbb{E}[\mathrm{cost}_\beta | F_\beta]\} \\ &\le \max\{2\mathrm{OPT}_\alpha + 2\mathrm{OPT}_\alpha + 4\mathrm{OPT}_\beta, 2\mathrm{OPT}_\beta + 2\mathrm{OPT}_\beta + 4\mathrm{OPT}_\alpha\} \\ &= 4\mathrm{OPT}_\alpha + 4\mathrm{OPT}_\beta = 4\mathrm{OPT}\end{aligned}$$

其中$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\alpha|F_\beta]$和$\mathbb{E}[\mathrm{cost}_\beta|F_\beta]$的上界，是由于引理 3-6 和引理 3-7 的对称版本。■

3.4.3 讨论

通过仔细地分析可以知道，即便是在一维直线模型下，我们关于比例分配机制的4的近似都是紧的。考虑位置配置$\boldsymbol{x}=(\epsilon,0,0,\dots,0,1)$，可以验证当$\epsilon\to 0$并且假设有足够多的参与者时，我们的比例分配机制的近似比也趋向4。

我们还注意到，比例分配机制并不是组群可信的。是否能够在常数的近似比下，找到一个组群可信的机制，是一个很有趣的未决问题。

我们还研究了比例分配机制在三设施选址问题中的两个扩展。第一个扩展是这样的：前两个设施与我们当前同样放置，对于第三个设施，也会随机选定在某个参与者上报的位置上，但是选定的概率，与这个参与者到前两个设施距离的较小值成正比。不幸的是，我们找到了一个并不显然的反例，证明了这个机制不是可信的。①

另一种扩展是在一维直线上，三设施选址问题的可信机制。前两个设施分别确定型地选择在最左和最右的两个上报的地址，而第三个设施，随机选取在某个参与者上报的位置上，并且选定的概率，与这个参与者到前两个设施距离的较小值成正比。这个机制可以保证线性的近似比。

3.5 圆上的机制

这一节中，我们考虑在圆上的度量空间(S^1,d)，这里$S^1\subset\mathbb{R}^2$是二维欧几里得空间中的圆，并且对任意$x,y\in S^1$，$d(x,y)$定义为x,y所张成的劣弧的长度。我们总可以将问题归一化，假定S^1这个圆的周长为 1。注意，第 3.3 节得到的$\frac{n-1}{2}$的下界在这里依然适用，因为圆可以被在局部看成直线。现在我们将给出一个确定性的组群可信机制，并证明它将保证$n-1$倍的近似比。在渐进意义下，我们的结果是紧的。

① 这个反例是这样的：在位置0处存在n_0个参与者，位置1处存在n_1个参与者，位置$1+x$处存在n_2个参与者，位置$1+x+y$处存在1个参与者。这里n_0足够大，保证了我们总可以假定第一个设施放置在了$l_1=0$处。在这个配置下，假定$y=100,x=10^5,n_1=50,n_2=4$。经过仔细的验算可以得出，在位置$1$处的参与者，可以谎报自己的位置到$1+x$来获利。

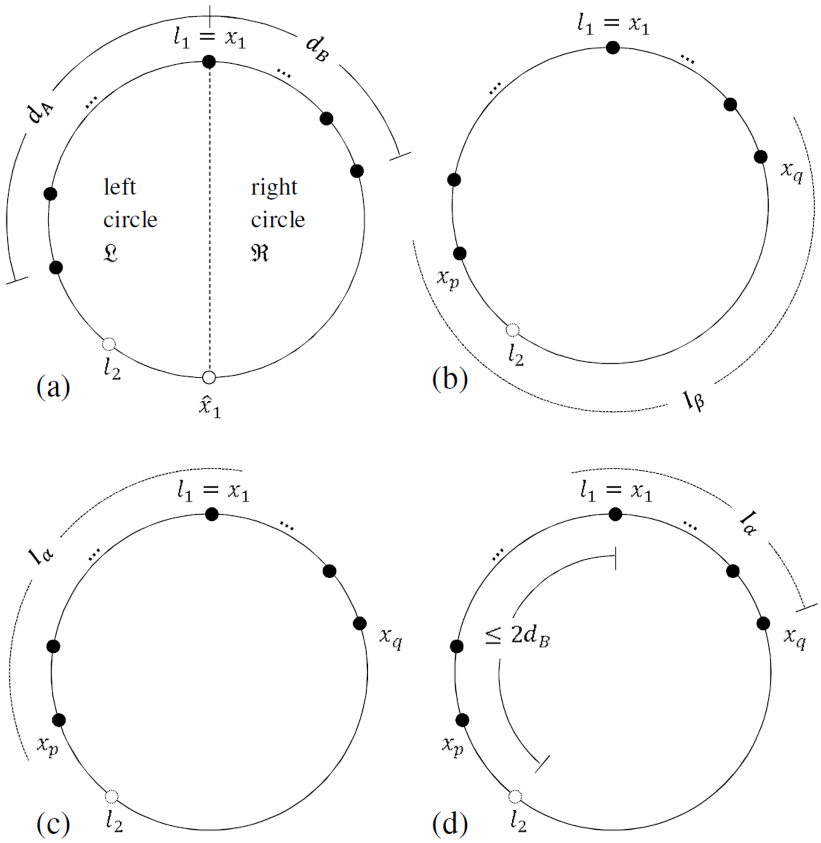

图3.4　圆分配机制

圆分配机制：

给定位置配置$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，第一个设施永远放置在$x_1$处。如图 3.4(a)，我们用$\hat{x}_1$表示$x_1$的对径点，并且由$x_1$和$\hat{x}_1$圆被分成了两个半圆。我们称其中一个是左半圆$\mathcal{L}$，另一个是右半圆$\mathcal{R}$[1]。设$A$和$B$分别表示位置在$\mathcal{L}$和$\mathcal{R}$上的那些参与者组成的集合，并且假设所处位置为$x_1$以及$\hat{x}_1$（如果有的话）的那些参与者，只出现在$A$集合内，因此$A \cap B = \emptyset$。定义$d_A = \max_{i\in A} d(x_1, x_i)$，以及$d_B = \max_{i\in B} d(x_1, x_i)$（如果$B$为空，定义$d_B = 0$）。我们按照如下策略分配第二个设施：

- 如果$d_A < d_B$，设施l_2选在右半圆$\mathcal{R}$上，且到l_1的距离为$\min\{\max\{d_B, 2d_A\}, 1/2\}$的点；
- 如果$\mathrm{d}_A \geq d_B$，设施l_2选在左半圆$\mathcal{L}$上，且到l_1的距离为$\min\{\max\{d_A, 2d_B\}, 1/2\}$的点。

[1] 假定$x_1, \hat{x}_1$都同时既属于左半圆也属于右半圆。

在这个机制中，第一个设施总放置在第一个参与者上报的位置，是 dictatorship。我们接下来将圆在$\hat{x}_1$处剪断，变成一条直线，并且规定第一个参与者所汇报的位置x_1为原点。这样一来，我们可以从直观上对圆分配机制理解得更清楚。

变成直线后，最右端（或最左端）的参与者的坐标为d_B（或$-d_A$）。如果我们最右端参与者到原点的距离，大于最左端参与者（$d_B > d_A$），我们就将第二个设施放置在坐标为$\max\{d_B, 2d_A\}$的位置；否则，我们将第二个设施放置在原点左端，坐标为$-\max\{d_A, 2d_B\}$处。可以验证，这样的在直线上的机制是组群可信的。

但是，当我们从直线变回到圆的时候，坐标$\max\{d_B, 2d_A\}$（或$-\max\{d_A, 2d_B\}$）有可能已经穿越了$\hat{x}_1$，到达了左半圆（或右半圆），这将破坏可信性。因此，对于圆问题，我们在$\hat{x}_1$处放置一个终止符，使得如果第二个设施的坐标超过了$1/2$（类似地，如果第二个设施坐标小于$-1/2$），那么我们就将其放置在恰好$\hat{x}_1$处。

在接下来的证明中，我们需要将这个直线的表示谨记在心。例如，我们将在集合A中离l_1最远的那个参与者称作“最左端参与者”；类似地将集合B中离l_1最远的那个“最右端参与者”。

3.5.1 组群可信性

定理 3–4：圆分配机制是组群可信的。

证明：我们反设其不是组群可信的，也就是说，存在一个位置配置$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$，一组参与者$S \subset N$，以及他们谎报的位置$\boldsymbol{x}'_S$，使得对每个参与者$i \in S$，都能严格获利

$$\mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}'_S, \boldsymbol{x}_{-S}), x_i) < \mathrm{cost}(f(\boldsymbol{x}), x_i)$$

不失一般性，我们假设对于给定的位置配置有$d_A \geq d_B$，而另一种可能$d_A < d_B$的证明是类似的。因此，对于$f(\boldsymbol{x})$，可知$l_2 \in \mathcal{L}$在左半圆中。

对第一个参与者，她离$f(\boldsymbol{x})$的距离为0，因此无论如何她都不会参与谎报，即$1 \notin S$。由此我们可以知道，在$f(\boldsymbol{x}'_S, \boldsymbol{x}_{-S})$中，第一个设施依然在$x_1$的位置。我们设$f(\boldsymbol{x}'_S, \boldsymbol{x}_{-S}) = \{l_1, l'_2\}$。用$C_1$表示从$l_1$到$l_2$逆时针方向的弧，$C_2$表示从$l_1$到$l_2$顺时针方向的弧，这样一来，所有$A$中的参与者都在$C_1$上，所有$B$中的参与者都在$C_2$上。

显然地，l'_2不可能是l_1或者l_2，因为那样的话谎报就不能获利了。因此我们有如下几种情形：

情形 1：$l'_2 \in C_1$。先注意到B中的参与者都不能通过谎报获利，因为对他们来说，l_1或者l_2中的一个，一定比新的l'_2要近，因此必有$S \subset A$以及$d'_B \geq d_B$。

接下来，由于所有共谋的参与者都在C_1上，为了让他们获利，l'_2必须在C_1上

并且保证$d(l_1,l_2') < d(l_1,l_2)$。这只会在$d_A' < d_A$的时候发生，因为已经证明了B中的参与者不会谎报。为了达到这一点，A中的最左端参与者必然在S中，也就是参与了谎报。设这个参与者为x_p。注意到$l_2 = x_p$不可能发生，因为否则p已经获得了零成本，就没有理由谎报了。因而$l_2 \neq x_p$，此时我们有

$$d(l_1,l_2') \geq \min\{2d_B', 1/2\} \geq \min\{2d_B, 1/2\} = d(l_1,l_2)$$

与我们关于$d(l_1,l_2') < d(l_1,l_2)$的结论矛盾。

情形 2：$l_2' \in C_2$。由于和情形 1 类似的原因，A中不可能有人参与谎报，也就是说$S \subset B$。因而，$d_A' \geq d_A$。我们进一步根据l_2和l_2'的位置分三种子情况。

情形 2.1：$l_2 = \hat{x}_1$。为了得到$l_2 = \hat{x}_1$，要么$d_A = \frac{1}{2}$，要么$d_B > \frac{1}{4}$。

如果$d_A = \frac{1}{2}$，我们必然有$l_2 = l_2'$因为A中的参与者不谎报，此时没有任何人可以获利。如果$d_B > \frac{1}{4}$，我们有$d_A' \geq d_A \geq d_B \geq \frac{1}{4}$。为了获利，$l_2'$必须在右半圆$\mathcal{R}$上，因为所有谎报的人都在$B$中。但是这也不能发生，因为：

$$\min\{\max\{d_B', 2d_A'\}, 1/2\} \geq \min\{2d_A', 1/2\} = \frac{1}{2}$$

情形 2.2：$l_2 \neq \hat{x}_1$，并且l_2'在$\mathcal{L}$上（包括$\hat{x}_1$）

由于$l_2 \neq \hat{x}_1$，我们知道$d_B < \frac{1}{4}$。因而所有参与者$j \in B$到l_2'的距离至少是$d(x_j, l_1)$，因为$l_2' \in \mathcal{L}$。显然地，在这种情况下任何B中的参与者都不能获利，因为他们最近的设施仍然是l_1。

情形 2.3：$l_2 \neq \hat{x}_1$，并且l_2'在$\mathcal{R}$上（不包括$\hat{x}_1$）

此时我们有$d_B < \frac{1}{4}$, 以及$d_A \leq d_A' < \frac{1}{4}$。对于任何参与者$k \in B$，$d(x_k, l_2')$都必将至少是$2d_A' - d_B$，而后者至少是$d_B$因为我们有$d_B \leq d_A \leq d_A'$。这已经大于等于她到第一个设施的距离$d_B$了，也导致了矛盾。

至此定理证明完结。 ■

3.5.2 对社会成本的近似比

定理 3-5：圆分配机制的近似比不超过$n-1$。

证明：对一个任给的配置$\boldsymbol{x}$，考察最优解并使用与第 3.4.2 节中类似的α和β集合的定义。我们用I_α表示最小的可以将所有在α中的参与者覆盖住的弧，I_β表示最小的可以将所有在β中的参与者覆盖住的弧。显而易见地，$I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$。我们用$|I_\alpha|$表示$I_\alpha$的长度，$|I_\beta|$表示$I_\beta$的长度。易知，$\mathrm{OPT} \geq |I_\alpha| + |I_\beta|$。

不失一般性，我们假定$l_1 = x_1 \in I_\alpha$，并且$d_A \geq d_B$，此时根据我们的机制，第二个$l_2 \in \mathcal{L}$。

类似于第 3.4.2 节，我们定义$\text{cost}_\alpha = \sum_{i\in\alpha} \text{cost}(f(\boldsymbol{x}), x_i)$为$\alpha$中的所有参与者的成本之和，$\text{cost}_\beta = \sum_{i\in\beta} \text{cost}(f(\boldsymbol{x}), x_i)$为$\beta$中的所有参与者的成本之和。可以看到，$\text{cost}_\alpha \le (|\alpha| - 1)\text{OPT}$，因为$l_1 \in I_\alpha$，并且$\alpha$中的任何参与者与$l_1$的距离都不超过$|I_\alpha| \le \text{OPT}$，除了$x_1 = l_1$她自身成本为 0。接下来我们将证明$\text{cost}_\beta \le |\beta|\text{OPT}$，这将足以证明我们的$n-1$上界，因为$\text{cost} = \text{cost}_\alpha + \text{cost}_\beta \le (n-1)\text{OPT}$。

如果$l_2 \in I_\beta$，β中的每个参与者，到最近的设施的距离都不超过$\left|I_\beta\right|$，必然有$\text{cost}_\beta \le |\beta|\left|I_\beta\right| \le |\beta|\text{OPT}$。

如果$l_2 \notin I_\beta$，我们取p为左半圆$\mathcal{L}$上的最左端参与者，q为$\mathcal{R}$上的最右端参与者。我们有$d(l_1, x_p) = d_A, d(l_1, x_q) = d_B$。如果$x_p, x_q$同时在$I_\beta$中（图 3.4(b)），我们将遇到矛盾：根据我们的机制，l_1, l_2必然在x_p, x_q为端点的两个不同的弧上，也就是说，同时包含x_p, x_q的I_β，至少会包含l_1, l_2中的一者。而无论是$l_1 \in I_\alpha$或者$l_2 \notin I_\beta$都与我们的假设矛盾，因此$x_p \in I_\alpha$以及$x_q \in I_\alpha$中至少有一个成立。

- 如果$x_p \in I_\alpha$（图 3.4(c)），$|I_\alpha| \ge d_A$因为x_1和x_p同时都在这段弧上。但是β中的每个参与者，距离l_1至多$d_B \le d_A$，这意味着
$$\text{cost}_\beta \le |\beta| d_A \le |\beta||I_\alpha| \le |\beta|\text{OPT}$$
- 如果$x_p \notin I_\alpha$，我们必须有$x_q \in I_\alpha$（图 3.4(d)）。我们此时知道$|I_\alpha| \ge d_B$，因为x_1和x_q同时在这段弧上。此时，β中的所有参与者都在左半圆$\mathcal{L}$中，我们也知道β中的每个参与者，到达l_1, l_2其中一者的距离不会超过$d(l_1, l_2)/2$。基于$l_2 \notin I_\beta$以及$x_p \in I_\beta$的事实，我们推导出$l_2 \ne x_p$。在这种情形下，根据我们圆机制的定义，$d(l_1, l_2) \le 2d_B$。综上，我们依然有
$$\text{cost}_\beta \le |\beta| \frac{d(l_1, l_2)}{2} \le |\beta| d_B \le |\beta||I_\alpha| \le |\beta|\text{OPT}$$

证毕。 ■

3.5.3 讨论

我们在这里补充一点，就是上述关于圆分配机制的近似比的证明已经达到了最优。考虑配置$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$，其中$d(x_1, d_2) = d(x_1, x_3) = 0.1$，并且$x_3 = x_4 = \cdots = x_n$，但是$x_2$和$x_3$在$x_1$的不同侧。在这一情形下，$\text{OPT} = 0.1$，但是我们的机制将给出$\text{cost} = 0.1(n-1)$。

如上文所述，我们的机制是受到直线上的确定性机制的启发。我们现在仍然不知道对于稍微复杂一些的度量空间，是否存在着近似比有界的确定性机制。例如，对于一个三分叉的星形图，我们不知道是否可能将我们的圆机制扩展到这一

空间。我们仅仅知道这样一个事实，如果第一个设施固定在其中一个参与者上报的地址上（dictatorship），那么没有确定性机制能够得到有界的近似比。

3.6 未决问题及讨论

在这一节中，我们总结出与我们工作相关的未决问题：

1. 第一个遗留下来的问题是，如何将我们得到的上下界进一步优化。对于确定性问题，上下界分别为$n-2$和$\frac{n-1}{2}$; 对于随机性问题，上下界分别为4和1.045。即便是在一维直线下如果能够继续缩小上下界的差距，都是有意义的。
2. 是否能够设计出对于较为一般的度量空间，确定性的可信机制，并且保证有限的近似比？设计出任何有界的近似比的机制都将会是一个重大突破，当然，也很有可能可以证明，任何可信机制的近似比都是无界的。
3. 如我们这一章所述，我们的比例分配机制并不是组群可信的。那么是否能够设计出一个组群可信的，并且保证常数近似比的机制呢？
4. 一个很自然的，并且是极为重要的问题是，考虑三个或三个以上的设施的放置问题，我们的线性下界是可以推广到这一新问题的。但是，即便是对一维直线问题，我们迄今也不知道任何确定性的有界可信机制。如果能够获得任何一个这样的机制，或者证明不存在性，都将会是重要的工作。对于随机的情形，如果规定问题在一维直线上，并且只有三个设施，我们给出了保证线性近似比的可信机制。那么是否可以对设施数量更多的情形给出可信机制呢？这也是一个很有趣的课题。

第4章 总结

在本文中，我们从两个不同的角度，研究了博弈论中的均衡。第一个角度是如何在多项式时间内计算均衡，第二个角度是如何设计可信机制，保证均衡有合适的近似比。注意到，可计算性以及可近似性，是算法博弈论中的两个重要方向。本文从两个不同的问题着手，分别对这两个方向进行初探，得到了全新和深刻的结果。

博弈论是一个博大的领域，我们第 2 章设计了定价的策略，第 3 章却又考虑没有价格参与的机制，这从表面上看是矛盾的。但是，生活中也的确存在这样的场合，它允许货币的流通，但又不能处处允许货币的流通，譬如受到了空间或者交易的限制。也就是说，存在将两者统一在一起的个别问题。

从更高层面上考虑，第 2 章中所研究的贝叶斯纳什均衡，考虑了不完全信息的博弈。根据定义，这类博弈并没有要求金钱的参与，也就是可以用于第 3 章的选址问题：如果每个参与者都拥有一个区间，自己真实的地址满足其中的均匀分布，那么这个扩展问题或许将融汇两章的精华。

综上，如何将更多的算法和数学知识，融入经济学，去设计合理的均衡，求解合理的均衡，是一个非常开放且长久的问题。

插图索引

表格索引

参考文献

[1] Hessameddin Akhlaghpour et al., "Optimal Iterative Pricing over Social Networks," in *5th Workshiop on Ad Auctions*, Stanford, 2009.

[2] Noga Alon, Michal Feldman, Ariel D. Procaccia, and Moshe Tennenholtz, "Strategyproof Approximation of the Minimax on Networks," *Mathematics of Operations Research*, (to appear).

[3] Aaron Archer and Éva Tardos, "Truthful mechanisms for one-parameter agents," in *FOCS*, 2001, pp. 482-491.

[4] Salvador Barberà, "An introduction to strategy-proof social choice functions," *Social Choice and Welfare*, vol. 18, no. 4, pp. 619-653, 2001.

[5] Salvador Barberà and Matthew Jackson, "A characterization of strategy-proof social choice functions for economies with pure public goods," *Social Choice and Welfare*, vol. 11, no. 3, pp. 241-252, 1994.

[6] Pierpaolo Battigalli and Marciano Siniscalchi, "Rationalization and Incomplete Information," *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, vol. 3, no. 1, 2003.

[7] Duncan Black, "On the rationale of group decision-making," *The Journal of Political Economy*, vol. 56, no. 1, pp. 23-34, 1948.

[8] John C. and Harsanyi, "Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, Parts I, II, III," *Management Science*, vol. 14, pp. 159-182, 320-334, 486-502, 1967-1968.

[9] Jing Chen and Silvio Micali, "Rethinking Rationalizability And Incomplete Information, And The Second-Knowledge Mechanism," , Submitted.

[10] Edward H. Clarke, "Multipart Pricing of Public Goods," *Public Choice*, vol. 11, pp. 17-33, 1971.

[11] Ofer Dekel, Felix Fischer, and Ariel D. Procaccia, "Incentive Compatible Regression Learning," in *SODA*, 2008, pp. 884-893.

[12] Peerapong Dhangwatnotai, Shahar Dobzinski, and Shaddin Dughmi, "Truthful Approximation Schemes for Single-Parameter Agents," in *FOCS*, 2008, pp. 15-24.

[13] Pedro Domingos and Matt Richardson, "Mining the network value of customers," in *SIGKDD*, 2001, pp. 57 - 66.

[14] Allen Gibbard, "Manipulation of Voting Schemes: A General Result," *Econometrica*, vol. 41, no. 4, pp. 587-601, Jul 1973.

[15] Andrew V. Goldberg and Jason D. Hartline, "Competitiveness via consensus," in *SODA*, 2003, pp. 215-222.

[16] Andrew V. Goldberg, Jason D. Hartline, Anna R. Karlin, and Michael Saks, "A Lower Bound on the Competitive Ratio of Truthful Auctions," in *STACS*, 2004, pp. 644-655.

[17] Andrew V. Goldberg, Jason D. Hartline, and Andrew Wright, "Competitive auctions and digital goods," in *SODA*, 2001, pp. 735-744.

[18] Google. (2010, April) The 1000 Most-Visited Sites on the Web. [Online]. http://www.google.com/adplanner/static/top1000

[19] Theodore Groves, "Incentives in Teams," *Econometrica*, vol. 41, pp. 617-631, 1973.

[20] Jason D. Hartline and Robert McGrew, "From Optimal Limited To Unlimited Supply Auctions," in *EC*, 2005, pp. 175-182.

[21] Jason Hartline, Vahab S. Mirrokni, and Mukund Sundararajan, "Optimal Marketing Strategies over Social Networks," in *WWW*, 2008, pp. 189-198.

[22] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*.: Cambridge University Press, 1986.

[23] David Kempe, Jon Kleinberg, and Éva Tardos, "Maximizing the Spread of Influence through a Social Network," in *SIGKDD*, 2003, pp. 137-146.

[24] Ron Lavi and Chaitanya Swamy, "Truthful and Near-Optimal Mechanism Design via Linear Programming," in *FOCS*, 2005, pp. 595-604.

[25] Daniel Lehmann, Liadan I Oćallaghan, and Yoav Shoham, "Truth revelation in approximately efficient combinatorial auctions," *Journal of the ACM*, vol. 49, no. 5, pp. 577-602, 2002.

[26] Pinyan Lu, Xiaorui Sun, Yajun Wang, and Zeyuan Allen Zhu, "Asymptotically Optimal Strategy-Proof Mechanisms for Two-Facility Games," in *EC*, 2010, pp. 315-324.

[27] Pinyan Lu, Yajun Wang, and Yuan Zhou, "Tighter bounds for facility games," in *WINE*, 2009, pp. 137-148.

[28] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green, *Microeconomic Theory*.: Oxford University Press, 1995.

[29] Elchanan Mossel and Sebastien Roch, "On the submodularity of influence in social networks," in *STOC*, 2007, pp. 128-134.

[30] H. Moulin, "On strategy-proofness and single peakedness," *Public Choice*, vol. 35, no. 4, pp.

437-455, 1980.

[31] Noam Nisan and Amir Ronen, "Algorithmic Mechanism Design," in *STOC*, 1999, pp. 129-140.

[32] Richard L. Oliver and Mikhael Shor, "Digital redemption of coupons: satisfying and dissatisfying effects of promotion codes," *Journal of Product and Brand Management*, vol. 12, no. 2, pp. 121-134, 2003.

[33] Ariel D. Procaccia and Moshe Tennenholtz, "Approximate mechanism design without money," in *EC*, 2009, pp. 177-186.

[34] Matthew Richardson and Pedro Domingos, "Mining knowledge-sharing sites for viral marketing," in *SIGKDD*, 2002, pp. 61-70.

[35] Mark Allen Satterthwaite, "Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions," *Journal of Economic Theory*, vol. 10, no. 2, pp. 187-217, 1975.

[36] James Schummer and Rakesh V. Vohra, "Mechanism design without money," in *Algorithmic Game Theory*, Noam Nisan et al., Eds.: Cambridge University Press, 2007, ch. 10.

[37] James Schummer and Rakesh V. Vohra, "Strategy-proof Location on a Network," *Journal of Economic Theory*, vol. 104, no. 2, pp. 405-428, 2001.

[38] Yves Sprumont, "The Division Problem with Single-Peaked Preferences: A Characterization of the Uniform Allocation Rule," *Econometrica*, vol. 59, no. 2, pp. 509-519, Mar 1991.

[39] William Vickrey, "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders," *Journal of Finance*, vol. 16, no. 1, pp. 8-37, Mar 1961.

[40] Zeyuan Allen Zhu, "Pricing in Social Networks: Equilibrium and Optimal Strategies," Working paper 2010.

致谢

First of all, I would like to express my gratitude towards my mentor, or my thesis supervisor, Pinyan Lu at Microsoft Research Asia (MSRA). It was he that introduced me the holy field of algorithmic game theory. He gives me all the freedom to choose my favorite topic, and is always insightful in what we discussed. Being a wonderful mentor, he is also a good friend.

At the same time, I shall never forget the days and evenings with my dear colleagues at MSRA: Yajun Wang, Xiaorui Sun and Wei Chen. We played and travelled, but more importantly we lost ourselves in contemplation and enjoyed the feeling of being so immersed in research.

Before my arrival at the Theory Group of MSRA, I am fortunate to meet my advisor at Tsinghua, Elad Verbin, brilliant and talkative. We spent many nights in the Bridge Café in an atmosphere strong in Espresso. Beyond the wide research areas he opened my eyes to, and the diversified techniques he taught me with, I cannot forget how his working style deeply influenced me, when my career fell to the pit.

Being the student from Dept of Physics, the department provided me with the greatest flexibility in designing my own curriculum. Some father-like teachers, say Dong Ruan and Weihua Zhang, have given me the courage and strength to set out on a long voyage in science.

I would also like to acknowledge my past advisors, Weizhu Chen, Gang Wang and Xiaoming Sun for their patience and support, and two extraordinary friends of mine, Chenguang Zhu and Yifei Yuan, who added so much laughter and joy to my research.

Last but not least, I never forget to thank my dearest mother for her unceasing support and unselfish dedication to my family.

For all of the above, and the unnamed, please allow me to express my deepest gratitude, now and always.

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：　　　　　　　　　　　　　　　　日　期：2010 年 7 月 10 日

附录 A 外文资料的调研阅读报告

Robust Mechanism Design

Introduction

Combinatorial Auction is a kind of auction in which bidders are allowed to bid for a union of goods, instead of only bidding for single good in traditional auction. Maximizing revenue or/and social welfare is one of the goals in designing auction mechanisms. Traditionally based on equilibria, mechanisms are found to be vulnerable to:

- **Collusion**. VCG is vulnerable when 2 players collude.
- **Complexity**. Some mechanisms require exponential number of rounds or communications.
- **Privacy**. Players publicly report their own utility functions
- **Equilibrium Selection**. There may be several Nash equilibria, while the property holds for just some of them.

In an unpublished manuscript of Micali and Valiant [1], they advocate overcoming the above weakness by designing mechanisms in a *resilient* way. This idea has then been formalized and well-discussed in a paper [2] submitted to STOC'10. Notice that several attempts have been made upon this new definition and they succeeded in designing a few mechanisms robust against collusion, complexity, privacy and equilibrium selection [3][4][5].

This new solution concept is not equilibrium-based. Only occasionally, the new concept coincides with traditional ones:

- **Strictly dominated strategy**. A special case when only a single strategy survives after the elimination.
- **The unique subgame-perfect equilibrium**. Another special case in games of *extensive form*.

REMARK 1:

- Games of *normal form*:players act simultaneously and the mechanism decides the outcome.
- Games of *extensive form*: a tree-structured mechanism and the player chooses among possible moves at each node.

Technically, the new concept is based on an elementary notion, *iterative elimination of distinguishably dominated strategies*. This new notion bridges a currently vast chasm: that between elimination of strictly dominated strategies and the elimination of weakly dominated strategies.

REMARK 2:

- B strictly dominates A: choosing B always gives a better outcome than choosing A, no matter what the other player(s) do.
- B weakly dominates A: There is at least one set of opponents' action for which B is superior, and all other sets of opponents' actions give B at least the same payoff as A.

Equilibrium Selection

As noticed in [2], elimination of weakly dominated strategies is unlike to be sufficiently meaningful. Therefore, the problem of equilibrium selection vanishes when the mechanism yields a (single) equilibrium:

- With strictly dominant-strategy. Such mechanism is rare and proved to be unable to guarantee even constant fraction of the property. [4][6]
- With survived strategy through iterated elimination of strictly dominated strategies. Shown by Abreu and Matsushima [7], and further extended by Glazer and Perry [8], mechanisms of this kind are capable of achieving all desired properties, but under strong assumptions: *each player perfectly knows the utility functions of all players*.

Notice that in the second kind mentioned above, the strictly dominated strategy is not yet defined when players do not have the perfect knowledge of other players' utilities. To overcome such obstacle, they consider the iterated elimination of *distinguishably dominated strategies*.

Preliminaries

Combinatorial Auctions. In a combinatorial auction with n players and multiple goods for sale,

- The *true valuation* of a player i for a subset S of goods: $TV_i(S)$.
- An *allocation*A consists of a partition of goods $A = A_0, A_1, \dots A_n$, where A_0 represents the unallocated goods
- An *outcome*Ω consists of an allocation$A$ and a price profile P, where P_i is the payment by i.

- We consider *unrestricted* auction: $TV_i(S)$ is independent of $TV_j(S')$ for any $(i,S) \neq (j,S')$.
- The *utility* of a player i: $u_i(A,P) = TV_i(A_i) - P_i$.

Extensive-Form Public-Action Mechanisms. They mechanism must specify the *decision nodes*, the players' *acting* at each node, the set of actions available to each player at each node, and the auction outcome associated to each *terminal node* – leaf of the game tree. The mechanism is of *public action*.

A player i's *strategy* specifies i's action at each decision node, and let σ be a *play* consists of a profile of strategies. $H(\sigma)$denotes the history of the play, and $M(\sigma)$ denotes the auction outcome (A,P) associated to $H(\sigma)$. Besides, a mechanism must provide an *opt-out* strategy OUT_i satisfying: $u_i(M(\mathrm{OUT_i} \sqcup \sigma_{-i}))$, for each strategy subprofile σ_{-i}. All definitions above may be probabilistic.

Generalized Contexts and Auctions. A game $G = (\mathcal{C}, M)$ has two components: a context C and a mechanismM. The context describes the players, possible outcomes, players' utilities for each outcome, and the players' knowledge. The mechanism describes which strategies are available to the players and how each profile yields an outcome.

DEFINITION 4: *A* (generalized) (auction) context$\mathcal{C} = (TV, (\mathbb{C}, I), EK)$ *consists of three components:*

- *The* true-valuation profileTV.
- *The* collusion structure$(\mathbb{C}, I)$, *where* $\mathbb{C}$ *is a partition of (collusive) players, and* I *is the set of players* i *s.t.* $\{i\} \in \mathbb{C}$. *We use agent to denote either an independent player or a collusive set and call a player in* I*as independent.*
- *In contrast to the* internal knowledge *of* A *which is* TV_A, *we define the* external-knowledge *vector* EK*: for each agent* $A \in C$, EK_A *is a set of valuation subprofiles for the players outside* A, *satisfying* $TV_{-A} \in EK_A$.

Now we define the relevant knowledge of an agent. Essentially this is the outcome with maximum welfare known to its members.

DEFINITION 5 ($\mathbb{MKW}$ **Benchmark**): *Given a context* $\mathcal{C}$ *and an agent*$\mathcal{A}$, *we define* $RK_{\mathcal{A}}$ *the* (total) relevant knowledge *of* $\mathcal{A}$, *to be the outcome with maximum revene among all outcomes* (A,P) *such that, for all player* j*:*

- *If* $j \in \mathcal{A}$, *then* $P_j = TV_j(A_j)$
- *If* $j \notin \mathcal{A}$, *then* $V_j(A_j) \geq P_j$ *for all* $V \in EK_{\mathcal{A}}$

The maximum known welfare *of* $\mathcal{A}$, $\mathbb{MKW}_{\mathcal{A}}$, *is the revenue of* $RK_{\mathcal{A}}$. *The maximum known welfare of* $\mathcal{C}$ *is denoted by* $\mathbb{MKW} = \max_{\mathcal{A}\in\mathbb{C}} \mathbb{MKW}_{\mathcal{A}}$.

The above two definitions come from [5]. There are actually two more types of benchmarks other than $\mathbb{MKW}$ defined in [5] and[3]. To avoid the ambiguity, here I define them in slightly different ways. For comes the $\mathbb{MKW}^{I}$, which denotes the maximal known welfare upon independent players.

DEFINITION 6 ($\mathbb{MKW}^{\boldsymbol{I}}$ **Benchmark**): *Given a context* $\mathcal{C}$ *and the independent player set* I*:*

$$\mathbb{MKW}^{I} = \max_{i\in I} \mathbb{MKW}_{\{i\}}$$

Next comes the $\mathbb{MEW}$, which is defined over the external knowledge of independent players, and thus more restricted than $\mathbb{MKW}^{I}$.

DEFINITION 7 ($\mathbb{MEW}$ **Benchmark**): *Given a context* $\mathcal{C}$ *and an independent player* i, *we define* RK_i' *the* (external) relevant knowledge *of* i, *to be the outcome with maximum revenue among all outcomes* (A, P) *such that, for all player* j*:*

- *If* $j = i$, *then* $P_j = 0, A_j = \emptyset$. *(External Sale Only)*
- *If* $j \neq i$, *then* $V_j(A_j) \geq P_j$ *for all* $V \in EK_{\{i\}}$.[①]

The maximum external welfare *of* i, $\mathbb{MEW}_i$, *is the revenue of* RK_i'. *The maximum external welfare of* $\mathcal{C}$ *is denoted by* $\mathbb{MEW} = \max_{i\in I} \mathbb{MEW}_i$.

The Results

The Relationship Between Three Benchmarks. Notice that $\mathbb{MKW}^{I}$is a benchmark more demanding than $\mathbb{MEW}$. Indeed, $\mathbb{MEW}$ is only defined over the external knowledge of independent players. By contrast, $\mathbb{MKW}^{I}$ allows any player i to assign goods to any player, including herself. Thus, $\mathbb{MKW}^{I}$ captures the total (i.e., both internal and external) relevant knowledge of all players, in a *collusion-resilient* way. We go one step forward. To leverage the total knowledge of not only just the independent players, but also the colluded players, is more demanding. This is the so-called *collusion-leveraging*. The above definition of $\mathbb{MKW}$ is coincident with such idea.

Informal Statement of the Results. If we define the *total performance* to be the summation of revenue and social welfare:

1. There exists a mechanism guaranteeing a revenue of $\mathbb{MEW}/2$.[3]
2. There exists a mechanism guaranteeing a total performance of $\mathbb{MKW}^{I}/3$.

① There are actually more subtle requirements like $P_j = 0$ if $A_j = \emptyset$ in [3]. It is unknown at this moment that whether these requirements can be removed in their proofs.

3. There exists a mechanism guaranteeing a total performance $\mathbb{MKW}/6$.[①][5]
4. There exists a mechanism guaranteeing perfect revenue when players have perfect knowledge.[4]

Notice that result 2 is a direct corollary of result 1. For any c between 0 and 1, one can transform a collusion-resilient mechanism M guaranteeing revenue $\geq c\mathbb{MEW}$ into a (collusion-resilient) mechanism with: 1) a total performance $\geq \frac{c}{c+1}\mathbb{MKW}^I$; 2) a revenue no less than $\frac{c}{c+1}$ times the total relevant knowledge of the "second-best-informed independent player". Essentially the new mechanism M' runs M with probability $\frac{1}{c+1}$ and the "second-price" auction[②] with probability $\frac{c}{c+1}$.

Distinguishable Dominance and Rationally Robust Implementation

We first come to the concept of distinguishable dominance in replace of the old strictly/weakly dominance. Whenever we say S is a vector of strategy sets in auction $(\mathcal{C}, M)$, we assume that each S_A is a set of strategies for agent $A \in \mathbb{C}$. We also define the Cartesian closure of Sas $\bar{S} = \prod_{A\in\mathbb{C}} S_A$, and define $\overline{S_{-A}} = \prod_{B\in\mathbb{C}, B\neq A} S_B$.

DEFINITION 8 (**Distinguishable Strategies**): *In auction $G = (\mathcal{C}, M)$, let S be a vector of strategy sets, and let σ_A and σ_A' be two different strategies for some agent A. Then, we say that σ_A and σ_A' are* distinguishable *over S if $\exists \tau_{-A} \in \overline{S_{-A}}$ such that $H(\sigma_A \sqcup \tau_{-A}) \neq H(\sigma_A' \sqcup \tau_{-A})$. In this case, we say that τ_{-A}*distinguishes*σ_A and σ_A'over S; else, σ_A and σ_A' are* equivalent *over S.*

DEFINITION 9 (**Distinguishably Dominated Strategies**): *In auction $G = (\mathcal{C}, M)$, let S be a vector of strategy sets, and let σ_A and σ_A' be two different strategies for some agent A. Then, we say that σ_A is* distinguishably dominated *by σ_A' over S (i.e.σ_A'*distinguishably dominates*$\sigma_A$over S), if:*

- *σ_A and σ_A' are distinguishable over S;*
- *$\mathbb{E}[u_A(M(\sigma_A \sqcup \tau_{-A}))] < E[u_A(M(\sigma_A' \sqcup \tau_{-A}))]$ for all strategy sub-vectors τ_{-A} distinguishing σ_A and σ_A' over S.*

DEFINITION 10 (**Compatible Contexts**): *In auction $G = (\mathcal{C}, M)$, we say that context $\mathcal{C}'$ is* compatible with agent *$A \in \mathbb{C}$ if:*

- $\mathcal{C}'$ and $\mathcal{C}$ have the same set of players and the same set of goods;
- $TV_A^{\mathcal{C}} = TV_A^{\mathcal{C}'}$;

---

① This bound is said to be able to be improved to $1/(2 + 2\sqrt{2})$ in the footnote of [5].

② In this auction each player bids a value together with a subset of goods. The player with the highest bid wins but pays the second highest value. All other goods remain unallocated and other players pay nothing.

- $EK_A^{\mathcal{C}} = EK_A^{\mathcal{C}'}$

Notice that it can be implied that $\mathrm{RK}_{\mathrm{A}}^{\mathcal{C}} = \mathrm{RK}_{\mathrm{A}}^{\mathcal{C}'}$. In the following, the rationally robust play is defined in the way that distinguishably dominated strategies are eliminated through a two iterations, assuming the possible occurrence of any compatible contexts. In a high level, an agent chooses to give up some strategy if for all compatible contexts, this strategy is distinguishably dominated.

DEFINITION 11 (**$\mathbf{L_1}$-Rationally Robust Plays**): *In auction $G = (\mathcal{C}, M)$, given agent A.*

1. *Let $\Sigma^0 = \prod \Sigma_i^0$ be a profile of strategy sets, such that Σ_i^0 is the set of all possible strategies of i according to M.*
2. *Define $\Sigma_{\mathcal{C},A}^1$ to be the set of strategies in Σ_A^0 that are not distinguishably dominated over Σ^0 in G, and $\Sigma_{\mathcal{C}}^1$ to be $\prod_{A\in\mathbb{C}} \Sigma_{\mathcal{C},A}^1$.*
3. *We say that a strategy $\sigma_A \in \Sigma_{\mathcal{C},A}^1$ is globally distinguishably dominated if there exists a strategy $\sigma_A' \in \Sigma_{\mathcal{C},A}^1$, such that for all contexts $\mathcal{C}'$ compatible with A, σ_A' distinguishably dominates σ_A over $\Sigma_{\mathcal{C}'}^1$, where $\Sigma_{\mathcal{C}'}^1$ is defined as $\Sigma_{\mathcal{C}}^1$ but for auction $(\mathcal{C}', M)$.*
4. *We denote by $\Sigma_{\mathcal{C},A}^2$ the set of all strategies in $\Sigma_{\mathcal{C},A}^1$ that are not globally distinguishably dominated.*
5. *We say that a strategy vector σ is an L_1-rationally robust play of auction G if $\sigma_A \in \Sigma_{\mathcal{C},A}^2$ for all agent A.*

REMARK 3: fixing the mechanism M, we have:

1. $\Sigma_{\mathcal{C},A}^1$ is the same for any $\mathcal{C}$ compatable with A. If fact, the set Σ^0 is independent of $\mathcal{C}$, and the strategies of A that are undominated over Σ^0 solely depends on A's own TV_A,EK_A. This makes the third item in Definition 11 well defined, i.e. $\sigma_A' \in \Sigma_{\mathcal{C},A}^1 = \Sigma_{\mathcal{C}',A}^1$.
2. $\Sigma_{\mathcal{C}}^1$ is dependent on $\mathcal{C}$. For example, given two contexts $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}'$ compatible with some agent A. Although we have that $\Sigma_{\mathcal{C},A}^1 = \Sigma_{\mathcal{C}',A}^1$, however, for some other agent $B \neq A$, it is very likely to have $\Sigma_{\mathcal{C},B}^1 \neq \Sigma_{\mathcal{C}',B}^1$, because even agent B's own true value TV_B differs in these two cases.

The 1/6 Mechanism on the Total Performance

In the description of the mechanism

- $\{1, \dots, n\}$ is assumed to be the set of players;
- ϵ, ϵ_1 and ϵ_2 are three arbitrarily small constants in $(0,1)$ s.t. $2n\epsilon_2 < \epsilon_1$.
- An outcome (A, P) is called reasonable if each P_j is non-negative;

- An allocation A is said to be for a set C of players if $A_j = \emptyset$ whenever $j \notin C$;
- Numbered steps refer to steps taken by players, bulleted ones to steps taken by the mechanism.

Mechanism M

- Set $A_i = \emptyset$ and $P_i = 0$ for each player i.
  (Outcome (A, P) will be the final outcome when exited)

1. Each player i, simultaneously with the others, publicly announces three things:
    a. a subset of players including i, C_i (allegedly the collusive set to which i belongs);
    b. an allocation for C_i, S^i (allegedly the allocation desired by C_i);
    c. a reasonable outcome, $\Omega^i = (\alpha^i, \pi^i)$ (allegedly the relevant knowledge of C_i).

- Set: $R_i = REV(\Omega^i)$, $\star = \mathrm{argmax_i}\, R_i$ (ties broken lexicographically), and $R' = \max_{i \notin C_\star} R_i$.
  (We shall refer to player $\star$ the star player, and to R' as the "second highest announced revenue")
- For each player i for which C_i includes a player j such that $i \notin C_j$, do:
    - reset $P_i = P_i + R_\star + \epsilon_1$ (i.e. punish i with a fine of $R_\star + \epsilon_1$)
    - for each $j \in C_i$ s.t. $i \notin C_j$, reset $P_i = P_i + R_\star + \epsilon_1$ and $P_j = P_j - R_\star - \epsilon_1$.
      (i.e. let i pay j the amount of $R_\star + \epsilon_1$)
- If there is a punishment in the above step, HALT. (no good allocation)
- Publicly flip a biased coin c_1 with probability ϵ in Heads. If Heads, uniformly and randomly choose a player i, reset $\star = i$ and $R' = 0$. (This reset happens rarely)
- Publicly flip a fair coin c_2. If Heads, set $A = S^\star$ and HALT.

2. (If Tails) Each player i such that $i \notin C_\star$ and $\pi_i^\star \geq 1$ publicly, and simultaneously with others, announce YES or NO. (i.e. declares whether he wants to receive $\alpha_i^\star$ with price $\pi_i^\star - \epsilon_2$)

- Reset allocation and prices as follows:
    - $P_\star = R' - n\epsilon_2$;

- for each player i such that either $i \in C_\star$ or $\pi_i^\star = 0$, reset $A_i = \alpha_i^\star$;
- for each player i such that $i \notin C_\star$ and $\pi_i^\star \geq 1$: if i announced NO, then $P_\star = P_\star + \pi_i^\star$ (i.e., $\star$ is punished due to i announcing NO); else, $A_i = \alpha_i^\star$, $P_i = P_i + \pi_i^* - \epsilon_2$, and $P_\star = P_\star - (\pi_i^\star - \epsilon_2)$ (i.e., $\star$ is rewarded due to i announcing YES).

- Finally, reset $P_i = P_i - \epsilon_2(1 - \frac{1}{1+R_i})$ for each player i (i.e., to break "utility ties", a small reward is added to each player)

LEMMA 8. *For all agents C and all $\sigma_C \in \Sigma_C^1$, the following two properties hold in Step 1:*

- *for all $i \in C, C_i \subset C$*
- *for any two different $i_1, i_2 \in C$, $i_2 \in C_{i_1}$ iff $i_1 \in C_{i_2}$.*

LEMMA 9. *For all agents C and all $\sigma_C \in \Sigma_C^1$, if $\star \notin C$, then in Step 2, for all players i in $C \backslash C_\star$ s.t. $\pi_i^\star \geq 1$:*

- *i announces YES whenever $TV_i(\alpha_i^\star) \geq \pi_i^\star$;*
- *i announces NO whenever $TV_i(\alpha_i^\star) < \pi_i^\star$*

LEMMA 10. *For all agents C and all $\sigma_C \in \Sigma_C^1$, if $\star \in C$, then in Step 2, for all players i in $C \backslash C_\star$ s.t. $\pi_i^\star \geq 1$, i always announces YES.*

LEMMA 11. *For all agents C and all $\sigma_C \in \Sigma_C^2$, and player $j \in C$ such that j is the lexicographical first player among all with $REV(\Omega^i) = \max_{k \in C} REV(\Omega^k)$, we have that $HiddenV_C(\Omega_j) \geq REV(RK_C)$. Where:*

$$HiddenV_C(\Omega) = \sum_{k \in C} TV_k(A_k) + \sum_{k \notin C} P_k, \qquad s.t. \Omega = (A, P)$$

LEMMA 12. *For all agents C and all $\sigma_C \in \Sigma_C^2$, we have that* $\max_{k \in C} REV(\Omega^k) \geq REV(RK_C)/3$.

THEOREM 6. *For all contexts $\mathcal{C}$ and all L_1-rationally robust plays $\sigma$of $(\mathcal{C}, M)$, we have that*

$$\mathbb{E}[REV(M(\sigma))] + \mathbb{E}[SW(M(\sigma))] \geq \frac{(1-\epsilon)\mathbb{MKW}}{6} - \epsilon_1$$

Open Questions

- Consider the benchmark of $a \cdot SW + b \cdot REV$?
- To improve the proof of **LEMMA 12**? Very likely.
- Impossibility result? An revenue upper bound of ½ by Guang Yang, under the strong assumption that:1) the final outcome is chosen using a single player's EK; 2) there exists some general knowledge – belief about other player's external knowledge.

Reference

[1] Silvio Micali and Paul Valiant, "Leveraging Collusion in Combinatorial Auctions," MIT, 2008.

[2] Jing Chen and Silvio Micali, "Rational Robustness for Mechanism Design," in *STOC*, 2010, Submitted.

[3] Jing Chen and Silvio Micali, "A New Approach to Auctions and Resilient Mechanism Design," in *STOC*, 2009.

[4] Jing Chen, Avinatan Hassidim, and Silvio Micali, "Robust Perfect Revenue From Perfectly Informed Players," in *ICS*, 2010, upgraded to a new version entitled "Resilient and Virtually Perfect Revenue From Perfectly Informed Players".

[5] Jing Chen, Silvio Micali, and Paul Valiant, "Robustly Leveraging Collusion in Combinatorial Auctions," in *ICS*, 2010.

[6] M. Satterthwaite, "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions," *Journal of Economic Theory*, vol. 10, no. 2, pp. 187-217, Apr 1975.

[7] D. Abreu and H. Matsushima, "Virtual Implementation in Iteratively Undominated Strategies: Complete Information," *Econometrica*, vol. 60, no. 5, pp. 993-1008, Sep 1992.

[8] J. Glazer and M. Perry, "Virtual Implementation in Backwards Induction," *Games and Economic Behavior*, vol. 15, pp. 27-32, 1996.

在学期间参加课题的研究成果

本论文第 2 章为我待投科研论文的一部分：

- **"Pricing in Social Networks: Equilibrium and Optimal Strategies"**
  To be submitted to *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2011)*.

第 3 章内容已经发表在 ACM-EC 2010 会议记录中。下表为在学期间我的所有已发表论文：

- **"Asymptotically Optimal Strategy-Proof Mechanisms for Two-Facility Games"**
  (姓氏拼音顺序) Pinyan Lu, Xiaorui Sun, Yajun Wang and Zeyuan A. Zhu.
  In *Proceedings of the 11th ACM Conference on Electronic Commerce (EC 2010)*.
- **"Inverse Time Dependency in Convex Regularized Learning"**
  Zeyuan A. Zhu, Weizhu Chen, Chenguang Zhu, Gang Wang, Haixun Wang, Zheng Chen.
  In *Proceedings of the 2009 edition of the IEEE International Conference on Data Mining (ICDM 2009)*.
  Best Student Paper Award Runner-Up
- **"P-packSVM: Parallel Primal grAdient desCent Kernel SVM"**
  Zeyuan A. Zhu, Weizhu Chen, Gang Wang, Chenguang Zhu, Zheng Chen.
  In *Proceedings of the 2009 edition of the IEEE International Conference on Data Mining (ICDM 2009).*
- **"A Novel Click Model and Its Applications to Online Advertising"**
  Zeyuan A. Zhu, Weizhu Chen, Tom Minka, Chenguang Zhu, Zheng Chen.
  In *Proceedings of the Third ACM International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM 2010)*.
- **"To Divide and Conquer Search Ranking by Learning Query Difficulty"**
  Zeyuan A. Zhu, Weizhu Chen, Tao Wan, Chenguang Zhu, Gang Wang, Zheng Chen.
  In *Proceedings of the 18th ACM Conference on Information and Knowledge Management (CIKM 2009)*
- **"A General Magnitude-Preserving Boosting Algorithm for Search Ranking"**
  Chenguang Zhu, Weizhu Chen, Zeyuan A. Zhu, Gang Wang, Dong Wang, Zheng Chen.
  In *Proceedings of the 18th ACM Conference on Information and Knowledge Management (CIKM 2009)*

综合论文训练记录表

<table>
<tr><td>学生姓名</td><td>朱泽园</td><td>学号</td><td>2006011366</td><td>班级</td><td>基应 61</td></tr>
<tr><td>论文题目</td><td colspan="5">算法博弈论中的两个均衡问题</td></tr>
<tr><td>主要内容以及进度安排</td><td colspan="5">在算法博弈论中研究均衡的设计与计算。从算法的角度入手，研究近似比的上下界，计算复杂性等相关问题。

1 月：完成无金钱参与的机制设计论文，投稿至 ACM-EC 2010 并已被录取。
1-2 月：调研 Robust Mechanism Design，并做报告。
3 月：出国交流，并调研其它算法博弈论的问题，并对论文选题。
4 月：病毒疹隔离，期间自学了高等算法、理论计算机基础两门课程。
5-6 月：选择“定价问题”作为研究目标，与导师和同学讨论完成论文，并计划投稿至 SODA 2011。
7 月：参加复旦大学暑期课程，并继续谱图理论等数学知识的学习。

指导教师签字：____________
考核组组长签字：____________
年 月 日</td></tr>
<tr><td>中期考核意见</td><td colspan="5">考核组组长签字：____________
年 月 日</td></tr>
</table>

指导教师评语	算法博弈论是理论计算机和经济学的交叉学科，随着网络经济的发展也在现实中发挥越来越大的作用。朱泽园同学在这个算法博弈论相关的综合论文训练中表现出了很强的思维，洞察，以及利用计算机程序辅助数学定理证明的能力。该论文的一部分结果已被算法博弈论方向的最好会议 ACM EC 接受，另一部分结果将投给算法方向的顶级会议 SODA. 总的来说，这是一篇很有水准的学士论文。 **指导教师签字：____________** **年 月 日**
评阅教师评语	朱泽园同学的学士论文解决了算法博弈论中的两个重要问题.是我在兼任清华大学理论计算机研究中心教授几年来接触到的数十份本科毕业论文(基本都是理论中心姚班的优秀学生所作)中最出色的论文. 我十分肯定该论文达到清华大学优秀本科毕业论文标准,并认为论文水平其实已达到硕士论文的水平. 朱泽园同学在论文研究中思维敏捷,在很多重要问题上给出突破性贡献。 **评阅教师签字：____________** **年 月 日**
答辩小组评语	**答辩小组组长签字：____________** **年 月 日**

总成绩：____________

教学负责人签字：____________

年 月 日